

# Modelación estadística en el diseño de gráficos de control

Saul Caraveo Escárcega, Daniel Chapa Núñez, Nancy Ivette Arana De las Casas, David Saézn Zamarrón

Tecnológico Nacional de México/Campus Cd. Cuauhtémoc, División de Estudios de Posgrado e Investigación, Ave. Tecnológico #137, Cd. Cuauhtémoc, Chih., C.P. 31500

## Resumen

En este artículo se presenta la modelación como una etapa clave para el diseño de gráficos de control antes de la implantación de un sistema de control estadístico de calidad. Primero se hipotetiza una distribución y se estiman los parámetros para luego someter los datos a un riguroso examen estadístico con lo cual se determina cuantitativamente el mejor modelo para el proceso. Posteriormente se hace necesaria una validación y confirmación del modelo. Los resultados de esta investigación conducen a que la variable bajo estudio (Brix), se distribuye normal e independientemente con varianzas comunes entre corridas de producción. Se consideran los aspectos prácticos para la aplicación de las técnicas relacionadas con el proceso de modelación.

## Abstract

This article presents modeling as a key stage for the design of control charts before the implementation of a statistical quality control system. First, a distribution is hypothesized, and the parameters are estimated, and then the data are subjected to a rigorous statistical examination, quantitatively determining the best model for the process. Validation and confirmation of the model are then required. The results of this research lead to the study variable (Brix), distributed normally and independently with common variances between production runs. Practical aspects of the application of techniques related to the modeling process are considered.

**Palabras claves:** Modelación Estadística, Control de Calidad, Histogramas, Gráficas de Probabilidad y Función de Correlación.

## 1. INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se describen la metodología y los resultados obtenidos del proceso de modelación estadística de un parámetro de operación muy importante en la fabricación de jugos, refrescos y otros tipos de bebidas, como lo es el grado Brix. Esta variable se define como el por ciento de sólidos en peso de una solución de glucosa pura a cierta temperatura. Para iniciar un proceso de mejora continua, como es el caso de la implantación de un sistema de control Estadístico de Proceso, el primer paso siempre será el de modelar el proceso, lo cual es una actividad de naturaleza iterativa como señalan Benjamín y Cornell (2014) y Box et. al. (1978).

El objetivo del presente estudio fue el de modelar estadísticamente un proceso de mezcla agua-jarabe y determinar las bases estadísticas necesarias y suficientes para posteriormente diseñar los gráficos de control más adecuados para este proceso. Los pasos que se siguieron consisten básicamente en hipotetizar una distribución y estimar sus parámetros para luego, mediante un riguroso análisis estadístico, determinar cualitativa y cuantitativamente cual modelo es el que el mejor aproxima la realidad del proceso. El paso final y muy importante consiste en verificar los supuestos del modelo y hacer una corrida confirmatoria del modelo para el proceso.

La metodología de la modelación ya se aplica desde hace tiempo como puede verse en Box et al. (1978), Soong (1981) y Devor et al. (1992) entre otros. Sin embargo, esta herramienta se utilizaba poco en ingeniería dado que era una actividad muy iterativa, tediosa y consumía demasiado tiempo aun cuando se procesaba la información

en una computadora. Actualmente ya se dispone de paquetes de software comercial que hacen que la actividad de modelación sea atractiva, entretenida y con pasos bien claros y definidos (Law y Kelton, 2014).

## 2. METODOLOGÍA

Los procedimientos para modelar un proceso son muy conocidos y podemos encontrarlos bien desarrollados por diversos autores (Box, et al.,1978; Soong,1981; DeVor, et al.,1992). Sin embargo, Law y Kelton (2014) son quien mejor describen este proceso considerando las siguientes etapas:

- a) Hipotetizar una distribución. Aplicando el procedimiento de muestreo, recolección y medición que se requieran, obtiene la mayor cantidad posible de lecturas. Una vez obtenidos los datos se presentan tabularmente y en una gráfica lineal para una visualización global de estos. Posteriormente se construye su histograma correspondiente con un número de intervalos aproximado por la fórmula de Sturges (1926) que sugieren Law y Kelton (2014):

$$\# \text{ de intervalos} = 1 + 3.3 \text{ Log} (\# \text{ Datos}). \quad (1)$$

- b) Los datos así codificados se presentan también mediante una tabla de frecuencias. Como último paso se construyen gráficos Box-Plot y de Cuantiles. Finalmente, con toda esta información se propone un modelo del proceso. Para hacer menos largo el proceso iterativo, en la búsqueda del modelo más adecuado, se hace el uso del paquete de software EXPERFIT de Law y Vincent (2020), sí como de MINITAB®.
- c) Estimación de Parámetros. Aquí solamente se estiman los parámetros del proceso y se presentan en forma tabular (media, varianza, rango, sesgo, curtosis, etc.)
- d) Selección del Modelo. En este paso se verifica la validez del modelo propuesto haciendo uso primeramente de un método heurístico que consiste simplemente en comparar la distribución de frecuencias real contra el teórico. En una segunda actividad, se construyen las gráficas de frecuencias acumuladas  $[F(x)]$ , y las P-P y Q-Q (Percentiles y Cuantiles respectivamente), o también pueden graficarse los datos sobre papel de probabilidad normal. Con las gráficas anteriores se podrá concluir de una manera cualitativa si el modelo propuesto es adecuado o no a los datos reales. Una prueba cuantitativa es someter los datos disponibles a las pruebas de Ji-cuadrada y también una prueba no paramétrica como la Kolmogorov-Smirnov.
- e) Verificación de Supuestos. Deben de quedar bien establecidos los supuestos como son los de independencia y el de varianza común entre productos. Para verificar la independencia de los datos se muestrea el proceso cada 10 minutos durante la corrida de producción. Una vez obtenidos los datos se procede a hacer un gráfico de dispersión para las lecturas consecutivas  $X(i)$  versus  $X(i+1)$  donde se pueda apreciar si existe una correlación de manera aproximada. Si se observa alguna posible correlación, entonces se procede a elaborar un autocorrelograma de los datos. La prueba estadística consiste en calcular las correlaciones  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$  para lecturas distantes  $i = 1, 2, 3 \dots n$ . Estos puntos se grafican y ninguno deberá estar fuera del intervalo de confianza de  $\mp \frac{2}{\sqrt{n}}$ . Para hacer estas gráficas se hace uso del EXPERFIT de Law y Vincent (2020) y el MINITAB®.

Para verificar el supuesto de varianzas comunes se toma una muestra aleatoria de tamaño 10 para 10 o más corridas de producción diferentes y se analizan los datos mediante la prueba de Bartlett, la cual se detalla bien en DeVor, et al., (1992). Un punto que también se propone es que, para tener un modelo relativamente válido, los datos utilizados en la modelación deben provenir de un proceso dirigido únicamente para causas comunes, para lo cual sugiere utilizar gráficos de control como un medio de asegurar esta restricción (DeVor, et al., 1992)

f) Reconfirmación del Modelo. Una vez logrado el control estadístico del proceso como una secuencia lógica de la aplicación del control estadístico de procesos se realiza una corrida confirmatoria del modelo aplicando los pasos anteriores. Adicionalmente, se realiza una prueba de independencia para medias y varianzas entre corridas cortas. Para realizar esta prueba se obtienen las medias y varianzas muestrales de 25 corridas. Para estos datos se elabora su autocorrelograma respectivo, y además se hace la prueba estadística de Pearson siguiendo el procedimiento descrito por Mendenhall et al., (2019).

### 3. RESULTADOS

El primer análisis que se aplicó a esta información fue su clasificación en dos histogramas, uno con 25 intervalos, como se muestra en la Figura 1. Con base en lo anterior hipotetizamos que el Brix sigue una distribución normal. Con el propósito de saber si existía un modelo diferente del normal que ajustara mejor a los datos del Brix se usó el EXPERFIT Y MINITAB®. En la Tabla 1 se muestra los resultados del análisis.

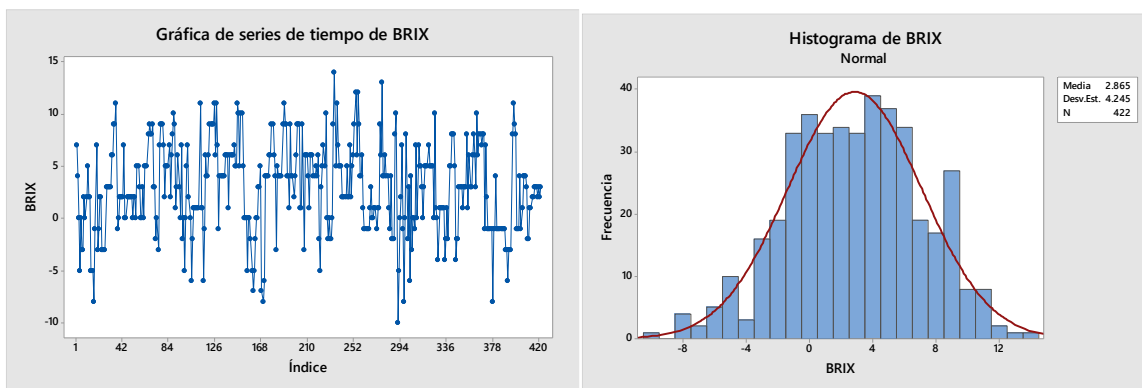


Figura 1. Histograma de los 422 datos de la modelación del brix.

Tabla 1. Evaluación Relativa de Modelos

Modelo	Aproximación %	AD	P-VALUE
Normal	92.9	1.380	<0.005
Log normal, 3 parámetros	92.9	1.391	<0.010
Valor extremo tipo B	67.9		
Exponencial de 2 parámetros		85.701	<0.005
Weibull de 3 parámetros		1.355	<0.010
Valor extremo más pequeño		4.409	<0.005
Valor extremo por máximos		6.365	<0.010
Gamma de 3 parámetros	67.9	1.568	<0.010
Logística	80.4	1.914	<0.005

El análisis y evaluación de varios modelos nos surgiere de que los modelos Weibull y el logístico son otros buenos candidatos, aparte del normal y el log normal, para representar a la distribución real de los grados brix. Esta declaración es soportada por la evidencia que nos muestra las primeras gráficas de la Figura 2. Como segunda fase del proceso de modelación se procedió a obtener la estadística básica para 422 datos como lo muestra la Tabla 2.

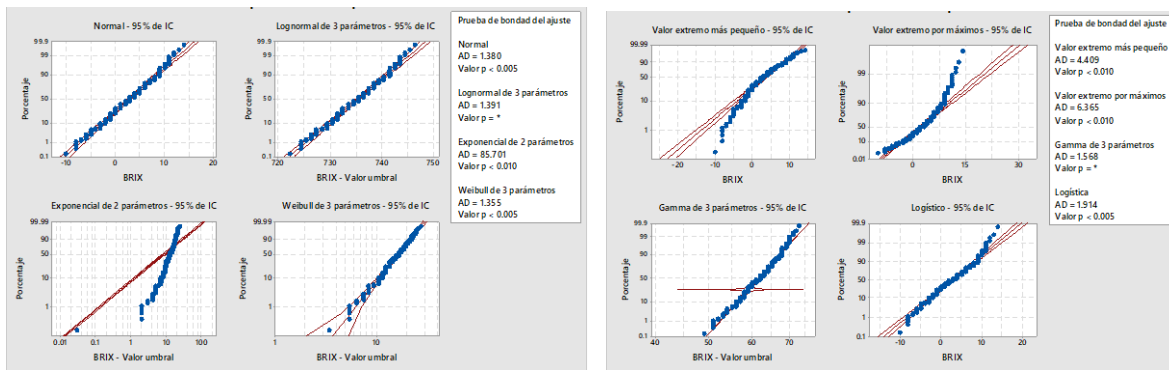


Figura 2. Gráficas de probabilidad propuestas para obtener el mejor modelo.

Tabla 2. Estadística Básica para los Datos del Brix

Características de la Muestra	Valor
Observaciones	422
Valor Máximo	-10.0
Valor Mínimo	14.0
Media	2.872
Mediana	3.0
Varianza	18.088
Coefficiente de Variación	1.4808
Sesgo	-0.134
Curtosis	2.72

Los datos de la Tabla 2 nos dicen que la distribución es aproximadamente simétrica y normal. Lo primero se apoya fuertemente en el hecho de que la media y la mediana tienen un valor aproximadamente igual, de 2.78 contra 3.0 respectivamente. La segunda afirmación, de que es Normal, es soportada por los valores de sesgo y curtosis, los cuales están cerca de cero (-0.13) y tres (2.78) respectivamente.

Como tercera fase de la modelación, se procedió a verificar de una manera cuantitativa la validez de los modelos propuestos y en este caso el normal. Primeramente, se inició con una comparación heurística de las frecuencias teóricas y reales como se presenta en el histograma de la Figura 1. La gráfica de cuantiles para las distribuciones y log normales que se presenta en la Figura 3 nos indica que estos modelos se ajustan bastante bien a los datos reales. Esto se evidencia por los puntos graficados, los cuales siguen aproximadamente una línea recta y además están muy próximos a la línea central o lineal teórica esperada. Como puede observarse, las curvas normales y log normal siguen casi la misma trayectoria.

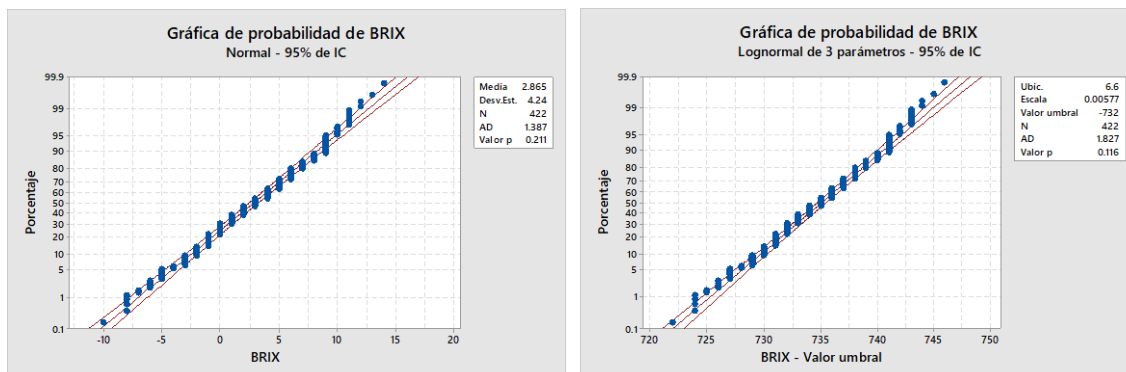


Figura 3. Gráficas de probabilidad que mejor modelan los grados brix.

Con el propósito de dar un veredicto de calidad formal al modelo propuesto, se realizaron dos pruebas de carácter cuantitativo. Una paramétrica, Ji-cuadrada, y otra no paramétrica, la Kolmogorov-Smirnov (K-S). El análisis de los datos mediante Ji-Cuadrada arrojó un estadístico de prueba de 9.046. Este valor es menor que el crítico de 11.071 con cinco grados de libertad y un nivel de significancia del 5%, por lo cual no se rechaza la hipótesis de que el grado brix sigue una distribución normal.

Por su parte, la prueba no paramétrica de K-S nos arrojó un estadístico de prueba de 0.05593 en cual es menor que el valor crítico de 0.0662 a un nivel de significancia de 5%, por lo cual no rechazamos que los datos del brix siguen una distribución normal. La cuarta etapa del proceso de modelación consistió en verificar los supuestos del modelo. El primer supuesto a comprobar fue el de independencia. Se obtuvieron 36 lecturas en forma consecutiva del proceso observándose una media de 0.68 y una varianza de 14.34. Estas lecturas fueron analizadas mediante un diagrama de dispersión entre valores consecutivos, de cada 10 minutos, y mediante un autocorrelograma con retrasos de 10 a 80 minutos respectivamente. Así mismo, el autocorrelograma para los 422 datos anteriores se aprecia en la figura 4.

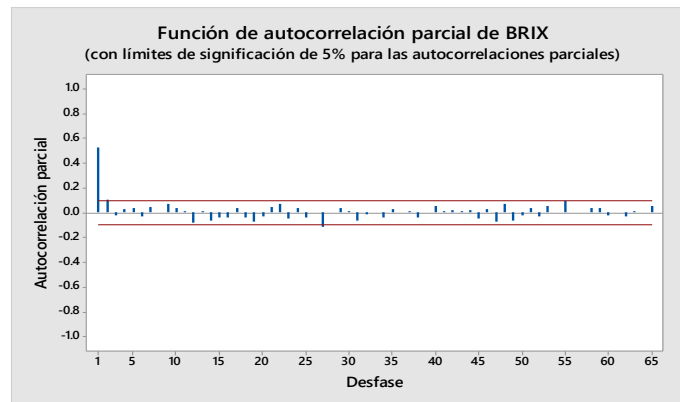


Figura 4. Autocorrelograma para los datos modelados.

Estos mismos resultados concuerdan con los procesos tipo lotes y continuos que se han investigado (Fellerrs,1989; Law y Kelton, 2014; Devor et al.,1992; Montgomery, 2019 y Box et al.,1994). Las implicaciones teóricas y prácticas de la existencia de la autocorrección es que muchas pruebas estadísticas como el caso de la Ji-Cuadrada dejan de tener validez. Por lo cual, las técnicas heurísticas y no paramétricas (K-S) utilizadas anteriormente fueron un camino alternativo y adecuado para verificar la validez del modelo propuesto.

Otra limitante que nos impone el hecho de que brix esté auto correlacionado es en la construcción de gráficos de control. Debido a este fenómeno, no es posible utilizar la relación que nos da el teorema de límite central, o sea

$$\sigma_X = \frac{\sigma'}{\sqrt{n}}, \tag{2}$$

dentro de cada corrida de producción. Tampoco, se deben hacer agrupaciones y estimar la desviación estándar poblacional a partir del rango  $\sigma' = \frac{R}{d_2}$ . Otro supuesto importante que se verificó fue el de varianzas comunes para los diferentes productos. Se recaban diez unidades aleatorias para cada una de trece corridas independientes. Estos datos fueron analizados mediante la prueba de Bartlett. De este análisis se concluyó que

los datos obtenidos para las 13 corridas independientes no presentan la evidencia suficiente para declarar que las varianzas del brix sean diferentes, con un nivel de significancia del 5%.

Como último paso de la modelación se realizó una corrida confirmatoria una vez logrado el control estadístico. Durante un período de dos semanas se recolectaron 395 lecturas para 19 corridas independientes. Estos datos fueron analizados primeramente por el histograma. El análisis de estos mediante la prueba Ji-Cuadrada arrojó un estadístico de prueba de 5.5735 y una significancia observada de 0.13433 con tres grados de libertad. Por su parte, el análisis mediante la prueba Kolmogorov-Smirnov arrojó un estadístico de prueba 0.0206 para el modelo normal que se estaba probando. Esta misma sugerencia es apoyada por los resultados del EXPERFIT y MINITAB, el cual nos dice que los datos se aproximan en un 95.8% a una distribución normal.

Puesto que los valores críticos de la Ji-Cuadrada, 7.8147, y de K-S,  $0.06842 \left( \frac{1.36}{\sqrt{395}} \right)$ , son mayores que los estadísticos de prueba de 5.5735 y 0.0206 respectivamente para un nivel de significancia del 5%, no se rechaza la hipótesis de que el brix sigue una distribución normal. Como en este caso del brix las lecturas están autocorrelacionadas la prueba Ji-cuadrada no tiene validez, la mayor evidencia queda soportar por la prueba K-S, lo cual nos dice que los datos no proporcionan evidencia suficiente para declarar que el grado brix no se distribuye normalmente, con un nivel de significancia del 5%.

Continuando con la corrida confirmatoria se muestrean 25 corridas en forma independiente y para un periodo de mayor estabilidad, con un tamaño promedio de n=24 lecturas por corrida. La información recabada se analizó primero mediante un autocorrelograma y un diagrama de dispersión. Para gráficos de dispersión de medias contra varianzas el análisis arrojó un coeficiente de correlación de 0.2065 para el cual, al aplicar la prueba de Pearson, se dio un estadístico de prueba de t=1.034 y una significancia observada de 0.15594 con 23 grados de libertad.

El análisis del autocorrelograma de la Figura 5 nos dice que los datos obtenidos para cada corrida son independientes entre corridas. Se sustenta el hecho de que los datos no siguen un patrón no aleatorio y que además todos los puntos se encuentran en un intervalo de confianza del 95% limitado por  $\pm 0.4 \left( \pm \frac{2}{\sqrt{25}} \right)$ . El patrón que siguen los datos en este caso del Brix es similar a las propuestas por Box, et al. (1978) y Law y Kelton (2014).

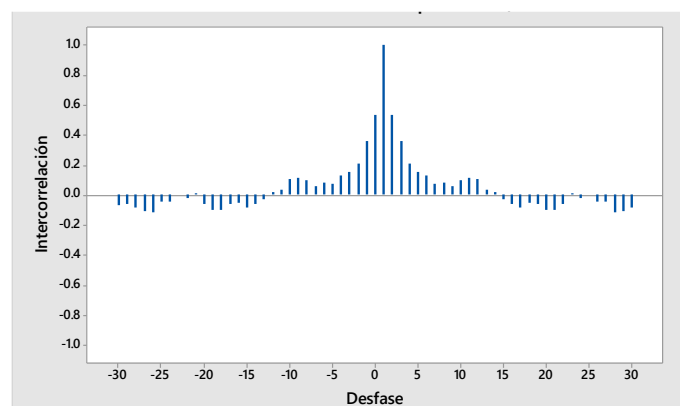


Figura 4. Función de Inter correlación para grados brix.

Esta misma decisión es obtenida al comparar el estadístico de prueba de Pearson t=1.034, el cual es menor que el valor crítico t=1.714 para un nivel de significancia del 5% y 23 grados de libertad. Aunque visualmente se puede

establecer que no existe correlación entre las medias y varianzas muestrales del grado brix entre corridas cortas de producción, el valor P nos lleva cuantitativamente a declarar que el evento de independencia entre corridas cortas es común. Esto es, suponiendo que las medias y varianzas muestrales del brix están correlacionadas, la probabilidad de encontrar un estadístico peor que  $t(v=23) = 0.2065$  es de aproximadamente 0.15594

#### 4. CONCLUSIONES

El método de modelación estadística seguido nos conduce a declarar que la variable bajo estudio se distribuye en forma normal; que las diferentes corridas de producción tienen una misma varianza; y que los datos muestran independencia estadística entre corridas. La aplicación inmediata que nos sugieren los resultados anteriores es que un gráfico de medias es apropiado para controlar la variación del proceso, considerando como un subgrupo a todas las lecturas de brix que se obtengan dentro de cada corrida. Además, este hecho no invalida los posibles valores de Cpk, Cp, Cpm, etc., que pudieran obtenerse. Durante la implantación de un sistema de control estadístico de calidad, el principal problema consiste en determinar que gráficos de control usar, por lo que se recomienda el proceso de modelación como un paso fundamental en el establecimiento en bases de diseño como son independencia, normalidad, y varianzas comunes entre corridas de producción.

#### 5. FUENTES DE INFORMACION

- [1] Minitab 17 Statistical Software (2010). [Computer software]. State College, PA: Minitab, Inc. (www.minitab.com)
- [2] DeVor, R.E., Chang, T., and Shutherland, J.W. (1992). **Statistical Quality Control**, 1st. Edition, McMillan, New York.
- [3] Fisz, M. (1980). **Probability Theory and Mathematical Statistics**, 3<sup>a</sup> Edición, R.E., Krieger Publishing Co., N.Y., U.S.A.
- [4] Gunter, B. (1994). "Q-Q Plots", **Quality Progress**, February 1994. (ASQC).
- [5] Law, A.M. and Kelton W.D. (2014). **Simulation Modeling and Analysis**, 5<sup>a</sup> Edición, McGraw Hill, E.U.A.
- [6] Law, A.M. and Vincent, S. (2020). **Software**, Averill M. Law & Associates, Tucson Az., E.U.A. <http://www.averill-law.com/>
- [7] Mendenhall W., Beaver R.J. Y Beaver B. (2020). **Introduction to Probability and Statistics Metric Edition**, 15th. Ed., CENGAGE Learning.
- [8] Soong, T.T. (1981). **Probabilistic Modeling and Analysis in Science and Engineering**, 1<sup>st</sup>. Edition, Wiley y & Sons, N.Y., U.S.A.
- [9] Montgomery D.C. (2019). **Introduction to Statistical Quality Control, Enhanced eText**, 8th. Ed., Wiley. USA.
- [10] Benjamin J.R and Cornell C.A. (2014). **Probability, Statistics, and Decision for Civil Engineers**, 1<sup>st</sup> Edition, Dover Publications, USA.

Correo electrónico autor: [narana@itcdcuauhtemoc.edu.mx](mailto:narana@itcdcuauhtemoc.edu.mx)