Condiciones de estabilidad para sistemas autónomos mediante funciones Lyapunov variantes en el tiempo

Rafael Iván Ayala Figueroa[1], Chávez Murga Arturo Alejandro[1], Verónica Quintero Rosas[2]

[1] Tecnológico Nacional de México/ Instituto Tecnológico de Mexicali, Av. Tecnológico s/n, Col. Elías Calles, Mexicali BC, 21376. Departamento de Eléctrica-Electrónica.
[2] Tecnológico Nacional de México/ Instituto Tecnológico de Mexicali, Av. Tecnológico s/n, Col. Elías Calles, Mexicali BC, 21376. Departamento de Sistemas y Computación.

Resumen

En este trabajo estamos interesados en la estabilidad Lagrangiana y la estabilidad asintótica de sistemas autónomos, también conocidos como variantes en el tiempo. Mostraremos condiciones suficientes para asegurar ambos tipos de estabilidad a través de funciones de Lyapunov dependientes del tiempo. Posteriormente aplicamos los resultado a sistemas de la forma $\dot{x} = A(t)x$. Así mismo se presentan algunos ejemplos numéricos y analíticos.

Abstract

In this work we are interested in the Lagrangian stability and the asymptotic stability of time-varying systems. We show sufficient conditions to ensure both types of stability through decreasing time-varying Lyapunov functions. Later we apply the result to systems of the form ẋ =A(t)x. We also present some numerical and analytical examples.

Palabras Clave: Estabilidad, Función de Lyapunov, Sistemas variantes en el tiempo.
Keywords: Stability, Lyapunov function, Time-varying systems.

1. INTRODUCCIÓN

El segundo método de Lyapunov establece condiciones suficientes para la estabilidad de soluciones de sistemas no autónomos (también conocidos como variantes en el tiempo) en el sentido de Lyapunov. Este método depende de la existencia de una función $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que en un entorno U del origen se anula en el cero ($V(0) = 0$) y que $V(x) > 0$ para todo x perteneciente a $U \setminus \{0\}$. Dicha función es llamada *función de Lyapunov*. El segundo método de Lyapunov es un hito en el análisis de estabilidad, sin embargo, no existen métodos para encontrar o construir funciones de Lyapunov.

La estabilidad de soluciones de sistemas no autónomo ha sido ampliamente estudiada. Por ejemplo, es bien conocido que la estabilidad de las soluciones de sistemas lineales invariantes en el tiempo de la forma $\dot{x} = Ax$, se encuentra determinada por los valores propios de la matriz A. En el caso de los sistemas lineales variantes en el tiempo $\dot{x} = A(t)x$, la estabilidad no depende de los valores propios de $A(t)$ ni existen criterios generales de estabilidad (Rosenbrook, 1963). Así, el problema de estabilidad de soluciones de sistemas autónomos es más complejo que el de los no autónomos. Es importante señalar que se han realizado numerosos esfuerzos para evaluar la estabilidad en esta clase de sistemas. Sin embargo, muchos de ellos imponen condiciones al sistema del tipo "variación lenta en el tiempo" o cotas superiores como $\|A(t)\| < +\infty$. (Amato, Celentano, & Garofalo, 1993; Rosenbrook, 1963, Khalil, 2002).

En este trabajo presentamos condiciones que nos permitan determinar la estabilidad de soluciones en un entorno U del origen para sistemas autónomos mediante la existencia de una función $V(t, x(t))$ que nos acote las soluciones con condición inicial en U tal como sucede para sistemas no autónomos. En los sistemas autónomos la idea es similar sin embargo la función que buscamos dependerá explícitamente del tiempo.

Preliminares

Sea el intervalo $\mathbb{R}^{\oplus} = [0, +\infty)$. $C[\mathbb{R}^{\oplus}]$ denota el conjunto de funciones continuas con dominio en $\mathbb{R}^{\oplus}$ e imagen en $\mathbb{R}$. Una función $\alpha(t)$ que pertenece al conjunto $C[\mathbb{R}^{\oplus}]$ se dice de clase $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ si $\alpha(0) = 0$ y es creciente para todo t.

Consideremos el sistema no lineal variante en el tiempo

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})), \qquad \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{t_0} \tag{2.1}$$

para $t_0 \geq 0$, con condición inicial $x_0 = x(t_0)$, donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y $f: \mathbb{R}^{\oplus} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función continua tal que $f(t, 0) = 0$ para todo $t \geq t_0$.

Definición 1. El sistema (2.1) se dice que es

- *Lagrange estable* si existe $M > 0$ tal que $\|x(t)\| < M$ para todo $t \geq t_0$.
- *Lyapunov estable* si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x(t_0)\| < \delta$ entonces $\|x(t)\| < \epsilon$ para todo $t \geq t_0$.
- *Asintóticamente estable* si es Lyapunov estable y $x(t) \to 0$ mientras $t \to +\infty$.

Definición 2. Sea $f(t) \in C[\mathbb{R}^{\oplus}]$. Definimos los conjuntos $\mathcal{C}^+$y $\mathcal{C}^-$ como sigue

- $\mathcal{C}^+ = \left\{ f(t) \colon \lim_{t \to +\infty} \int_{t_0}^{t} f(t)dt < +\infty \right\}$.
- $\mathcal{C}^- = \left\{ f(t) \colon \lim_{t \to +\infty} \int_{t_0}^{t} f(t)dt < -\infty \right\}$.

Considere el sistema lineal autónomo

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{t_0} \tag{2.2}$$

donde $t_0 \geq 0$, con condición inicial $x_0 = x(t_0)$ y $A(t)$ una función matricial continua. Es de resaltar que el teorema de Floquet (Floquet, 1883) resuelve un caso particular del problema de valor inicial (2.2). Floquet aborda el problema suponiendo $A(t + T) = A(t)$ para algún $T > 0$. Floquet muestra que existe un cambio de coordenadas que transforma el sistema (2.2) en un sistema lineal invariante en el tiempo. De esta manera se pueden calcular los valores propios del sistema invariante y determinar su estabilidad de la misma forma que la teoría clásica. Este método tiene la desventaja de que es prácticamente imposible determinar el cambio de coordenadas conveniente para este fin. Existen métodos que se aproximan a resolver este problema, sin embargo, en general es complicado aplicarlos (Cai, Gu, & Zhong, 2001; Lust, 2001; Wang, & Hale, 2001).

El método directo de Lyapunov depende de la existencia de una función con algunas propiedades particulares. La teoría de estabilidad de Lyapunov requiere de una función monótona decreciente para asegurar la estabilidad asintótica. Chen & Yang (2016) han establecido condiciones suficientes para garantizar estabilidad asintótica de una clase de sistemas variantes en el tiempo utilizando funciones de Lyapunov no monótonamente decrecientes.

2. RESULTADOS

Teorema 1. Considere el sistema (2.1). Suponga que existe una función diferenciable $V: \mathbb{R}^{\oplus} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{\oplus}$ con $V(t,0) = 0$ para $t \geq t_0$, una función α de clase $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ y una función continua $g: \mathbb{R}^{\oplus} \to \mathbb{R}$ tal que

a) $\alpha(\|x(t)\|) \leq V(t,x(t))$
b) $\dot{V}(t,x(t)) \leq g(t)V(t,x(t))$

El sistema es Lagrange estable si $g(t)$ pertenece al conjunto $\mathcal{C}^+$. Asintóticamente estable si $g(t)$ pertenece al conjunto $\mathcal{C}^-$.

Demostración. De la condición b) tenemos

$$\frac{\dot{V}(t,x(t))}{V(t,x(t))} \leq g(t).$$

Integrando ambos lados en el intervalo t_0 a t se obtiene

$$V\big(t,x(t)\big) \leq V\big(t_0,x(t_0)\big)e^{G(t)}, \tag{3.1}$$

para todo $t \geq t_0$, donde $G(t) = \int_{t_0}^{t} g(t)dt$.

Supongamos que $g(t)$ pertenece al conjunto $\mathcal{C}^+$, entonces existe un número real M_0 tal que $G(t) \leq M_0$ para todo $t \geq t_0$, de aquí que

$$V\big(t,x(t)\big) \leq V\big(t_0,x(t_0)\big)e^{M_0},$$

para todo $t \geq t_0$. De la continuidad de V podemos asegurar que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$V\big(t_0,x(t_0)\big)e^{M_0} \leq \alpha(\epsilon),$$

si $\|x(t_0)\| < \delta$. De lo anterior y la condición a) tenemos que

$$\alpha(\|x(t)\|) \leq V\big(t,x(t)\big)V\big(t_0,x(t_0)\big)e^{M_0} \leq \alpha(\epsilon),$$

para todo $t \geq t_0$, lo que conduce a $\|x(t)\| \leq \epsilon$, entonces (2.1) es Lyapunov estable.

Asumiendo $\epsilon = M < +\infty$ vemos que $\|x(t)\| \leq M$, por tanto (2.1) es Lagrange estable. Para demostrar la estabilidad asintótica utilizamos la condición a) y la ecuación (3.1) como sigue

$$\alpha(\|x(t)\|) \leq V\big(t, x(t)\big) \leq V\big(t_0, x(t_0)\big)e^{G(t)}. \tag{3.2}$$

Es claro que $G(t) \rightarrow -\infty$ mientras $t \rightarrow +\infty$ si $g(t)$ pertenece al conjunto $\mathcal{C}^-$. De la ecuación 3.2 tenemos que $\alpha(\|x(t)\|) \rightarrow 0$ mientras $t \rightarrow +\infty$. Esto completa la prueba.

Corolario 2. Considere el siguiente sistema escalar variante en el tiempo.

$$\dot{x}(t) = a(t)x^k(t)$$

donde $a(t)$ pertenece al conjunto $C[\mathbb{R}^{\oplus}]$, $k \geq 1$ y la condición inicial cumple $0 \leq x_0 \leq 1$. El sistema es Lagrange estable (asintóticamente estable) si $a(t)$ pertenece a $\mathcal{C}^+$ ($a(t)$ pertenece a $\mathcal{C}^-$).

Demostración. Sea $V(t, x(t)) = x^2(t)$, $\alpha(\|x(t)\|) = \frac{1}{2}\|x(t)\|$ y $g(t) = 2a(t)$. Claramente esta elección cumple la condición a) el teorema 1. Por otro lado,

$$\dot{V}\big(t, x(t)\big) = a(t)\Big(V\big(t, x(t)\big)\Big)^{\frac{k+1}{2}}$$

debido a que $0 \leq x_0 \leq 1$ entonces

$$\dot{V}\big(t, x(t)\big) \leq g(t)V\big(t, x(t)\big)$$

Por tanto, se cumple la condición b) del teorema 1. De esta forma el sistema es Lagrange estable si $g(t)$ pertenece al conjunto $\mathcal{C}^+$. Finalmente $g(t)$ pertenece al conjunto $\mathcal{C}^+$ si y solo sí $a(t)$ pertenece al conjunto $\mathcal{C}^+$. La prueba para estabilidad asintótica es idéntica.

Teorema 3. Considere el sistema lineal variante en el tiempo (2.2). Suponga que existe una matriz diferenciable $P(t)\colon \mathbb{R}^{\oplus} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ que satisface $P(t) > 0$ para todo $t \geq t_0$ y una función $g\colon \mathbb{R}^{\oplus} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$A^T(t)P(t) + P(t)A(t) + \dot{P}(t) \leq g(t)P(t).$$

El sistema (2.2) es Lagrange estable si $g(t)$ pertenece a $\mathcal{C}^+$. Asintóticamente estable si $g(t)$ pertenece a $\mathcal{C}^-$.
Demostración. Sea $V\big(t, x(t)\big) = x^T(t)P(t)x(t)$. De las condiciones de $P(t)$ es claro que existe una constante $\alpha > 0$ tal que $x^T(t)\alpha I_n x(t) \leq x^T(t)P(t)x(t)$, donde I_n es la matriz identidad de $n \times n$.

Elijamos $\alpha(\|x(t)\|) = \alpha x^T(t)x(t)$ entonces,

$$\alpha(\|x(t)\|) = x^T(t)\alpha I_n x(t) \leq x^T(t)P(t)x(t) = V\big(t, x(t)\big).$$

Calculamos $\dot{V}(t, x(t))$ como sigue

$$\dot{V}(t,x(t)) = x^T(t)\left(A^T(t)P(t) + P(t)A(t) + \dot{P}(t)\right)x(t),$$

Entonces

$$\dot{V}(t,x(t)) \le x^T(t)[g(t)P(t)]x(t) = g(t)V(t,x(t)).$$

Aplicando el teorema 3 el resultado es inmediato.

Una clase de sistema autónomos de particular interés son los sistemas lineales periódicos. Hacia el final del siglo XIX Floquet caracterizó las soluciones de los sistemas lineales periódicos como sigue.

Teorema 4. (Floquet) Sea el sistema

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{t} \ge \boldsymbol{t_0} \ge \boldsymbol{0} \tag{3.3}$$

con condición inicial $x_0 = x(t_0)$ y $A(t+T) = A(t)$ para algún $T > 0$. Si $\Phi(t)$ es una matriz fundamental del sistema (3.3) entonces cumple que $\Phi(t+T) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)\Phi(T)$. Más aún, para cada matriz constante B tal que

$$e^{TB} = \Phi^{-1}(0)\Phi(T)$$

existe una matriz periódica $Q(t) = Q(t+T)$ tal que

$$\Phi(t) = Q(t)e^{Bt}$$

Demostración. La demostración se puede encontrar en Floquet (1883).

Lema 5. Sea P una matriz constante de $n \times n$ positiva definida y $Q(t)$ cualquier matriz de $n \times n$ invertible dependiente del tiempo, entonces $P(t) = [Q^{-1}(t)]^T P Q^{-1}(t)$ es positiva definida.

Demostración. Por hipótesis $0 \le y^T P y$ para todo vector y n-dimensional. Consideremos el cambio de coordenadas $y = Q^{-1}(t)x$, entonces $0 \le y^T P y = x^T[Q^{-1}(t)]^T P Q^{-1}(t)x = x^T P(t)x$. Por tanto $P(t)$ es positiva definida.

Teorema 6. Sea el sistema

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{t} \ge \boldsymbol{t_0} \ge \boldsymbol{0} \tag{3.4}$$

con condición inicial $x_0 = x(t_0)$ y $A(t+T) = A(t)$ para algún $T > 0$. Sea $\Phi(t) = Q(t)e^{Bt}$ una matriz fundamental de (3.4). El sistema es Lagrange estable si existe $g(t)$ en el conjunto $\mathcal{C}^+$ y una matriz constante P tal que $B^T P + PB \le g(t)P$.

Demostración. Supongamos que existen $g(t)$ en el conjunto $\mathcal{C}^+$ y una matriz constante P tal que

$$B^T P + PB \leq g(t)P.$$

Entonces

$$[Q^{-1}(t)]^T (B^T P + PB) Q^{-1}(t) \leq [Q^{-1}(t)]^T g(t) P Q^{-1}(t).$$

Así

$$[Q^{-1}(t)]^T B^T P Q^{-1}(t) + [Q^{-1}(t)]^T P B Q^{-1}(t) \leq g(t)P(t).$$

Luego

$$[BQ^{-1}(t)]^T P Q^{-1}(t) + [Q^{-1}(t)]^T P B Q^{-1}(t) \leq g(t)P(t). \tag{3.5}$$

Por otro lado

$$\dot{\Phi}(t) = \dot{Q}(t)e^{Bt} + Q(t)Be^{Bt} = \big(\dot{Q}(t) + Q(t)B\big)e^{Bt}$$

Y

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t) = A(t)Q(t)e^{Bt}$$

Comparando las últimas dos ecuaciones obtenemos que

$\dot{Q}(t) + Q(t)B = A(t)Q(t)$ y por tanto

$$\dot{Q}(t) = A(t)Q(t) - Q(t)B. \tag{3.6}$$

Ahora bien, notemos que

$$\frac{d}{dt}[Q(t)Q^{-1}(t)] = \dot{Q}(t)Q^{-1}(t) + Q(t)\frac{dQ^{-1}(t)}{dt} = 0$$

de donde obtenemos

$$\frac{dQ^{-1}(t)}{dt} = -Q^{-1}(t)\dot{Q}(t)Q^{-1}(t)$$

Sustituyendo (3.5) en la última ecuación llegamos a

$$\frac{dQ^{-1}(t)}{dt} = -Q^{-1}(t)[A(t)Q(t) - Q(t)B]Q^{-1}(t)$$

Luego

$$\frac{dQ^{-1}(t)}{dt} = -Q^{-1}A(t) + BQ^{-1}(t)$$

Así

$$\frac{dQ^{-1}(t)}{dt} + -Q^{-1}A(t) = BQ^{-1}(t). \tag{3.7}$$

Sustituyendo 3.7 en 3.5

$$\left[\frac{dQ^{-1}(t)}{dt} \pm Q^{-1}A(t)\right]^T PQ^{-1}(t) + [Q^{-1}(t)]^T P\left[\frac{dQ^{-1}(t)}{dt} \pm Q^{-1}A(t)\right] \leq g(t)P(t),$$

Luego

$$[Q^{-1}(t)A(t)]^T PQ^{-1}(t) + Q^{-1}(t)PQ^{-1}(t)A(t) + \left[\frac{dQ^{-1}(t)}{dt}\right]^T PQ^{-1}(t) + Q^{-1}(t)P\frac{dQ^{-1}(t)}{dt} \leq g(t)P(t),$$

Así

$$A^T(t)[Q^{-1}(t)]^T PQ^{-1}(t) + Q^{-1}(t)PQ^{-1}(t)A(t) + \frac{d[Q^{-1}(t)]^T}{dt}PQ^{-1}(t) + Q^{-1}(t)P\frac{dQ^{-1}(t)}{dt} \leq g(t)P(t).$$

Definimos la matriz $P(t) = [Q^{-1}(t)]^T PQ^{-1}(t)$, entonces la expresión anterior queda como

$$A^T P(t) + P(t)A(t) + \dot{P}(t) \leq g(t)P(t).$$

Del lema 5 podemos decir que $P(t)$ es positiva definida. Finalmente, del teorema 3 se sigue el resultado.

Ejemplos de los resultados.

Ejemplo 1. El corolario 2 es obvio para $k = 1$. Sea el sistema

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t), \;\; x(t_0) = x_0.$$

Integrando directamente

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(t)dt}$$

observamos que la solución $x(t)$ es Lagrange estable si $a(t)$ pertenece a $\mathcal{C}^+$ y asintóticamente estable si pertenece a $\mathcal{C}^-$.

Ejemplo 2. Considere el sistema no lineal

$$\dot{x}(t) = \frac{t^p}{1+t^q} x^3(t)$$

con condición inicial $0 \le x_0 \le 1$ y $q - p > 1$. Se puede demostrar que

$$\int_{t_0}^{+\infty} \frac{t^p}{1+t^q} dt < +\infty.$$

Así $t^p/(1+t^q)$ elemento de $\mathcal{C}^+$. Del corolario 2 se sigue que el sistema es Lagrange estable. La figura 1 muestra la solución numérica eligiendo $x_0 = 1, t_0 = 0, p = 1$ y $q = 3$.

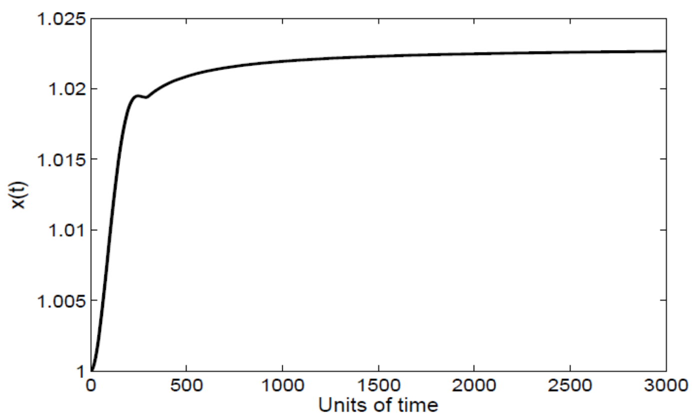

Figura 1. Solución numérica del sistema en el ejemplo 2 para $x_0 = 1, t_0 = 0, p = 1$ y $q = 3$.

Ejemplo 3. Sea el sistema

$$\ddot{x} + (2 + e^t)\dot{x} + x = 0.$$

Elijamos $g(t) = e^{-t}$ y la matriz

$$P(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El sistema se puede reescribir como

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 - e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A(t)y.$$

Entonces

$$A^T(t)P(t) + P(t)A(t) + \dot{P}(t) = \begin{pmatrix} -2 & -3-e^t \\ -3-e^t & -6-4e^t \end{pmatrix},$$

mientras que

$$g(t)P(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} \\ e^{-t} & 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

de lo anterior concluimos que

$$A^T(t)P(t) + P(t)A(t) + \dot{P}(t) < g(t)P(t)$$

para toda $t \geq 0$. Observemos que e^{-t} en una función que pertenece a $\mathcal{C}^+$ y que $A(t)$ y $P(t)$ cumplen las condiciones del teorema 3 por tanto la solución del sistema es Lagrange estable. Lo anterior se corrobora con la solución exacta $x(t) = 1 + e^{-t}$.

Ejemplo 4. Sea el sistema

$$\ddot{x} + k\dot{x} + \frac{\alpha}{t+1}x = 0$$

Donde k y α son reales positivos.

Elijamos $g(t) = -1/(t+1)$ y la matriz

$$P(t) = \begin{pmatrix} \alpha & t+1 \\ t+1 & (t+1)(kt+1) \end{pmatrix}.$$

El sistema se puede reescribir de la forma $\dot{y} = A(t)y$, donde $y = (y_1, y_2)^T = (x, \dot{x})^T$ y

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{\alpha}{t+1} & -k \end{pmatrix}.$$

Realizando los cálculos pertinentes podemos llegar a que

$$A^T(t)P(t) + P(t)A(t) + \dot{P}(t) \leq g(t)P(t).$$

Por otro lado se verifica que $g(t)$ es un elemento del conjunto $\mathcal{C}^-$ como sigue.

ISSN: 2007-4786

$$\int_{t_0}^{t} g(s)ds = -\int_{t_0}^{t} \frac{1}{s+1} ds = -ln\left(\frac{t+1}{t_0+1}\right)$$

para todo $t \geq t_0$. Luego

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{t_0}^{t} g(s)ds = \lim_{t\to+\infty} -ln\left(\frac{t+1}{t_0+1}\right) = -\infty.$$

De esta forma concluimos que la solución del sistema es asintóticamente estable.

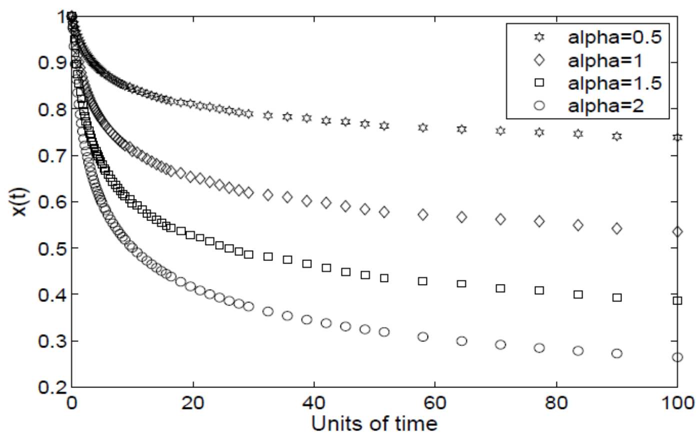

Figura 2. Soluciones numéricas del sistema en el ejemplo 4 para $k = 7$ y variando el valor de α.

3. CONCLUSIONES

En este trabajo estudiamos sistemas autónomos utilizando un criterio similar al de funciones de Lyapunov, con la diferencia de que la función no necesita ser estrictamente decreciente. Obtuvimos algunos resultados referentes a la estabilidad de Lagrange y estabilidad asintótica, primero para sistemas no lineales y después vimos que se puede aplicar el resultado a sistemas lineales. Presentamos ejemplos que muestran la efectividad de los resultados con algunos apoyos numéricos.

REFERENCIAS

[1] *Amato, F., Celentano, G., & Garofalo, F. (1993). New sufficient conditions for the stability of slowly varying linear systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 38(9), 1409-1411. de Accesibilidad Universal.* Santiago, Chile: Corporación Ciudad Accesible.
[2] Anderson, B. D., Ilchmann, A., & Wirth, F. R. (2013). Stabilizability of linear time-varying systems. Systems & Control Letters, 62(9), 747-755.
[3] Cai, Z., Gu, Y., & Zhong, W. (2001). A new approach of computing Floquet transition matrix. Computers & Structures, 79(6), 631-635.
[4] Chen, G., & Yang, Y. (2016). New stability conditions for a class of linear time-varying systems. Automatica, 71, 342-347.
[5] Duc, L., Ilchmann, A., Siegmund, S., & Taraba, P. (2006). On stability of linear time-varying second-order differential equations. Quarterly of applied mathematics, 64(1), 137-151.
[6] Floquet, G. (1883). Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. In Annales scientifiques de l'École normale supérieure (Vol. 12, pp. 47-88).
[7] Guillaume Sauron. Industria 4.0 y su impacto en la cadena de suministro. ISBN-10 : 6204391437

[8] Ilchmann, A., Owens, D. H., & Prätzel-Wolters, D. (1987). Sufficient conditions for stability of linear time-varying systems. Systems & control letters, 9(2), 157-163.
[9] Khalil, H. K., & Grizzle, J. W. (2002). Nonlinear Systems, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.
[10] Liao, X., Wang, L. Q., & Yu, P. (2007). Stability of dynamical systems. Elsevier.
[11] Lust, K. (2001). Improved numerical Floquet multipliers. International Journal of Bifurcation and Chaos, 11(09), 2389-2410.
[12] Rentería Arantxa. 2001. Robótica Industrial Fundamentos y aplicaciones, ISBN-10: 844812819
[13] Rosenbrook, H. H. (1963). The stability of linear time-dependent control systems. International Journal of Electronics, 15(1), 73-80.
[14] Wang, X., & Hale, J. K. (2001). On monodromy matrix computation. Computer methods in applied mechanics and engineering, 190(18-19), 2263-2275.
[15] Rentería Arantxa. 2001. Robótica Industrial Fundamentos y aplicaciones, ISBN-10: 8448128192

Correo de autor de correspondencia: ***veronicaquintero@itmexicali.edu.mx***