Una propuesta alternativa para el cálculo del gradiente de la función objetivo, aplicado al campo de programación lineal

Héctor D. Molina-Ruiz[1], Stephani M. Rojano-Chávez[1], Joel Montesinos Hernández[2]

[1] Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Escuela Superior de Tepeji del Río
[2] Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Área Académica de Arquitectura e Ingeniería

Resumen

Las matemáticas y sus diferentes ramas, han potenciado el desarrollo de la humanidad. En el presente, se realiza la integración de una propuesta alternativa para el cálculo del gradiente de la función objetivo, en un problema lineal con el método gráfico, que permite generar una perspectiva alternativa para mejorar el entendimiento del problema lineal y su solución en clase. Para la propuesta se desarrolló un símil algebraico que provee de iguales resultados al método de gradiente. Se integró el razonamiento algebraico para el caso de dos y tres variables y se estructuró una propuesta para n variables, además se contrastó el tiempo de cálculo (costo computacional) para ambos métodos, mediante el desarrollo del código para Python 3.7 y Matlab R2017b.

Abstract

Mathematics and its different fields, have been a key factor to improve human wellbeing and development. Present document presents an alternative calculus of objective function gradient, when a linear problem's solution is needed through graphic method, generating an alternative perspective to improve understanding and solution of a linear problem, in the classroom environment. Proposal integration goes thorough an algebraic simile for the objective function gradient, which provides same result as gradient method. It was integrated an algebraic context for two and three variables which provides the pathway to structure a proposal for n variables. It was also contrasted the computational cost for each method, thorough scripts in Python® 3.7 and Matlab® R2017b.

Palabras Clave: Cálculo alternativo, Gradiente de la función, Método gráfico, Programación lineal
Keywords: Alternative calculation, Graphic method, Function gradient, Linear programming

1. INTRODUCCIÓN

Las instituciones universitarias del país, y a nivel internacional, buscan la excelencia en la calidad educativa de los programas educativos que imparten (Molina-Ruiz, Bravo-Vargas, Flores-García y Ordoñez-Hernández, 2015). En este sentido, las instituciones de educación superior, han adoptado el modelo de educación por competencias como pauta para el logro de sus objetivos educativos. El nuevo ambiente de educación por competencias, que promueve como figura central del proceso de enseñanza – aprendizaje al estudiante, precia la implementación de estrategias y actividades […] (Molina-Ruiz, García-Lirios, Carreón-Guillen, García-Munguía y Sánchez-Sánchez, 2019). Por un lado, las estrategias educativas, permiten cimentar el proceso para generar un aprendizaje significativo, en tanto que las actividades, dinamizan el avance para lograr dicho aprendizaje (significativo).

En Valero-Molina y Jiménez-Fernández (2015), se expresa que, en el contexto de la enseñanza – aprendizaje, existen dificultades persistentes en el aprendizaje de habilidades académicas, lo cual puede causar interferencia en el rendimiento de la actividad académica. Aunado a lo anterior, el enfoque matemático (y sus diferentes ramas o aplicaciones) puede resultar complejo y abstracto, de allí la conveniencia de contar con métodos alternativos para el cálculo de los factores, parámetros o variables necesarios para la solución de problemas. Cabe hacer mención que el enfoque matemático tiene uso en los diferentes campos del conocimiento, como: medicina (Belova y Ivanchuk, 2020); humanidades (Mora-Rojas, 2016); ciencias administrativas (Moreno-Villacís y Pino-Ávila, 2018); ingeniería (Pino-Ávila, Cervantes-Rodríguez y Espín-Beltrán, 2019); y, en general, en la educación superior (Rodríguez-Revelo y Alarcón-Salvatierra, P. A., 2020).

Por un lado, como se expone en Herrada y Baños (2018), no hay que perder de vista que las asignaturas de Matemáticas favorecen el desarrollo intelectual, pues ayudan a los estudiantes a razonar de forma lógica y a preparar su mente para la crítica, así como para situaciones abstractas. Por otro, los programas de Matemáticas reflejan los objetivos específicos en los objetivos generales de cada ciclo, los que procuran desarrollar en los estudiantes las habilidades necesarias para la formación de la personalidad de los mismos y desenvolverse en la sociedad (Pino-Ávila, Cervantes-Rodríguez y Espín-Beltrán, 2019).

Es importante mencionar que las asignaturas matemáticas, favorecen los procesos cognitivos metodológicos y procedimentales, que ayudan en los estadios de toma de decisiones. El campo de la programación lineal (también conocida como investigación de operaciones o programación matemática), cuenta con diferentes técnicas y métodos, en las cuales se hace uso de herramientas matemáticas.

En los años siguientes a su concepción en 1947, en conexión con el plan de actividades del ejército, la programación lineal se ha vuelto muy utilizada (Dantzig, 1981). Como se expresa en Reidhead (1979), cuando un problema lineal se vuelve multidimensional o de mayor complejidad, métodos como el simplex (desarrollado por Dantzig), deben ser utilizados. El método de Dantzig está basado en la detección de un "hiper" poliedro ficticio en un espacio geométrico, con tantas dimensiones como restricciones en el problema original (Steen, 1979).

Como se hace mención en Mocholi-Arce y Sala-Garrido (1993), entre los métodos más sencillos e ilustrativos para resolver un problema de programación lineal, en busca de la solución óptima de entre las soluciones básicas, se encuentran el método gráfico y el método algebraico. El método gráfico permite la solución de problemas lineales que se encuentran definidos en un espacio de pocas variables.

Cabe hacer mención que, el caso más sencillo para aplicación del método gráfico, se acota a problemas lineales de dos variables. A pesar de que para el caso de tres variables el método gráfico se complica, al desarrollarlo por métodos tradicionales (a papel y lápiz); a través del desarrollo por medio de herramientas computacionales, la solución se simplifica. En este sentido, se puede apuntar, que el método se complica (tres variables) o se vuelve irresoluble por este método, cuando aumenta el número de variables en el problema lineal (cuatro variables o más variables).

El contar con herramientas de cálculo alternativo, permite a los tomadores de decisiones concretar dicha toma de decisiones, al interior de las organizaciones. Como se esboza en Wang y Ruhe (2007), la toma de decisiones es uno de los procesos cognitivos básicos del comportamiento humano para lo cual la decisión preferida o el curso de acción es elegido de un conjunto de alternativas, con base en cierto criterio.

Dentro del contexto académico, es importante contar con alternativas de selección, lo cual posibilita la realización de una analogía, en el contexto de la toma de decisiones. Al contar con alternativas de cálculo para los métodos de solución de problemas o ecuaciones, el estudiante, genera panoramas alternativos para la toma de decisiones.

ISSN: 2007-4786

De acuerdo con Brocardo, Delgado, Mendes y da Ponte (2022) el aprendizaje de las matemáticas, se relaciona con un entendimiento más amplio del desarrollo del raciocinio matemático de lo usualmente considerado. En el campo de la investigación de operaciones, es importante contar con herramientas de cálculo alternativo que den al estudiante la posibilidad de abordar la solución de problemas desde diferentes perspectivas y mejorar su habilidad de raciocinio matemático y, por tanto, su aprendizaje matemático.

El presente documento, muestra una forma de cálculo alternativo para el gradiente de la función objetivo, el cual puede ser utilizado en la solución de problemas lineales de dos variables (máximo 3 variables), como opción, para la determinación del vector de posición en la solución de problemas lineales.

2. METODOLOGÍA

El objetivo de la investigación, consiste en la presentación de un método alternativo para el cálculo del gradiente de la función objetivo en la resolución de problemas de programación lineal o programación matemática, mediante el uso del método gráfico. Lo anterior, debido que, en el proceso de solución de un problema de programación lineal, restricto en $\mathbb{R}^2$, el vector de posición (gradiente de la función objetivo), aporta información valiosa para el trazo de las curvas iso-propiedad, las cuales permiten determinar el óptimo global en un problema de programación lineal.

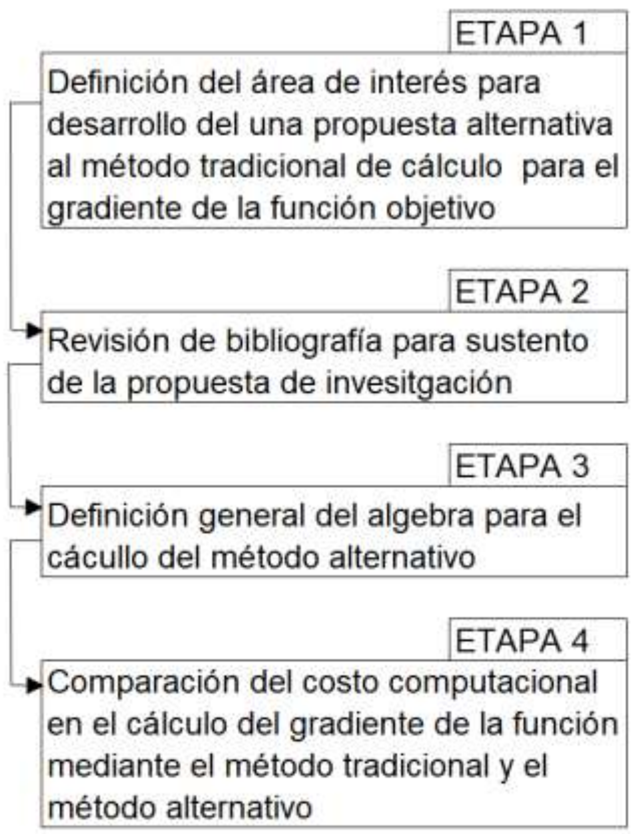

Figura 1. Diagrama representativo de la metodología aplicada para el desarrollo de la propuesta
Fuente: Elaboración propia, con base en el proceso de investigación

ISSN: 2007-4786
Volumen 16 – Número 2
Abril – Junio 2024

3. CONTEXTO MATEMÁTICO

Las matemáticas, han estado presentes en culturas y civilizaciones milenarias. Adhikari (2019) apunta que entre las civilizaciones más antiguas se encuentran: la Mesopotámica (3500 A.C.-500 A.C.), Indú (3300 A.C. - 1900 A.C.), Egipcía (3150 A.C. - 30 D.C.), Gierga (2700 A.C. - 479 D.C.), Maya (2600 A.C. - 900 D.C.), China (1600 A.C. - 1046 A.C.), Persa (550 A.C. - 331 D.C.), Romana (550 A.C. - 465 D.C.), Azteca (1345 D.C. - 1521 D.C.) e Inca (1438 D.C. - 1532 D.C.). Para Neugebauer (1961), parte de la ciencia antigua tiene su base en la transmisión del conocimiento en dos áreas básicas, las matemáticas y la astronomía. Por su parte Seidenberg (1978), apunta que existen dos grandes tradiciones, fácilmente discernibles, en la historia de las matemáticas: la geometría o constructiva y la algebraica o computacional.

Las matemáticas chinas empiezan a ser más detalladas a en el periodo de la dinastía HAN (208 A.C. – 8 D.C.), sin embargo, el corpus matemático de Egipto y Babilonia las preceden por más de un milenio (Martzloff, 1997). En Boyer y Merzbach (2011), se expone que se encuentra registro del uso de fracciones para el antiguo Egipto desde el año 2000 A.C. En el caso de la programación lineal, su origen se encuentra vinculado a la optimación de recursos de las operaciones militares en la segunda guerra mundial.

Como se expresa en Díaz-Muñoz (2005), la programación lineal nace con dos métodos para solucionar los diferentes problemas planteados, bajo el concepto de optimización de recursos escasos, minimizando costos o maximizando utilidades, con varias restricciones de recursos; el método gráfico y el método simplex.

Programación lineal

De acuerdo con Steen (1979), la programación lineal surgió de la aplicación de la teoría de juegos y la gestión de organizaciones. La mayor fortaleza del campo de la programación lineal, estriba en su capacidad para abordar un número finito de datos, sin requerir la extensión de los datos […] o la modificación de datos para asegurar la factibilidad de la función […] (Garmany, Orcutt y Parker, 1979). A partir de 1949 aparece un gran número de publicaciones sobre la base teórica de la programación lineal, así como de sus aplicaciones en las diversas ramas de la economía (Alvarado-Boirivant, 2009).

La programación lineal es un método de planificación muy útil para tomar decisiones que requieren una elección entre un gran número de alternativas (Alvarado-Boirivant, 2011). Por su parte Bazaraa, Jarvis y Sherali (2005), apuntan que la programación lineal, estudia la optimización (maximización o minimización) de una función lineal que satisface un conjunto de restricciones lineales de igualdad o desigualdad. La programación lineal trata sobre la planeación de las actividades para obtener un resultado óptimo, esto es, el resultado que mejor alcance la meta especificada (según el modelo matemático) entre las alternativas de solución (Alvarado-Boirivant, 2009).

La forma estándar para la representación de un problema de programación lineal, se compone de tres aspectos principales: la función objetivo, restricciones (o disponibilidad de recursos) y las restricciones de no negatividad (Ec. 1, Ec. 2, Ec. 3).

$$mín \;\; z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \quad . \quad . \quad . \quad .(1)$$

sujeto a:

ISSN: 2007-4786
Volumen 16 – Número 2
Abril – Junio 2024

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ a_{21}x_2 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_m & + & a_{m2}x_m & + & \dots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{array} \quad . \qquad . (2)$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \quad . \quad . \quad . (3)$$

Método gráfico

La técnica de solución gráfica puede ser utilizada únicamente cuando se resuelven problemas extremadamente simples (Reidhead, 1979). En específico para espacios de soluciones en $\mathbb{R}^2$ y de forma más compleja en $\mathbb{R}^3$. Por su parte Barrachina *et al*. (2019), exponen que el método gráfico, consiste en graficar cada desigualdad o ecuación y encontrar la solución; el cual es usado solo cuando se tiene un número pequeño de restricciones.

Para Simg y Trigueros (2022), queda claro que los conceptos geométricos juegan un papel importante en la construcción de las relaciones, por una parte, entre los conceptos del método geométrico y los conceptos algebraicos asociados al método simplex y, por otra, en la posibilidad de dar sentido a los pasos del método simplex. En el caso del método gráfico, existen diferentes elementos que permiten la solución del problema lineal, entre los cuales se cuentan: región factible, óptimos locales, óptimo global, restricciones (disponibilidad de recursos), restricciones de no negatividad, vector de posición de la función objetivo (gradiente de la función objetivo), curvas iso-propiedad.

La solución gráfica de un programa lineal con dos variables, aunque difícilmente es útil en la práctica, proporciona ideas que son cruciales para entender el método simplex algebraico general (Taha, 2012). Dicho método gráfico consta de un procedimiento general para su solución (Figura 1), el cual se lista a continuación:

- Definición o identificación de las variables de decisiones;
- Definición o identificación de la función objetivos;
- Definición o identificación de las restricciones;
- Identificación de los puntos (tabulación) para el trazo del segmento de recta vinculado a cada restricción;
- Cálculo del gradiente de la función;
- Trazo del plano cartesiano, ajustado a los puntos determinados para el trazo del segmento de recta vinculado a cada restricción;
- Trazo de los puntos para el trazo del segmento de recta vinculado a cada restricción en el plano cartesiano;
- Trazo de los segmentos de recta vinculado a cada restricción en el plano cartesiano;
- Identificación de la región factible;
- Identificación de puntos extremos (óptimos locales);
- Localización del gradiente de la función en el plano cartesiano;
- Trazo del vector de posición, asociado al gradiente de la función;
- Trazo de curvas iso-propiedad (también llamadas isolíneas o curvas de nivel), vinculadas al vector de posición del gradiente de la función, (para el caso de tres variables, se estaría hablando de planos iso-propiedad, isoplanos o planos de nivel); y,
- Determinación del óptimo global.

ISSN: 2007-4786
Volumen 16 – Número 2
Abril – Junio 2024

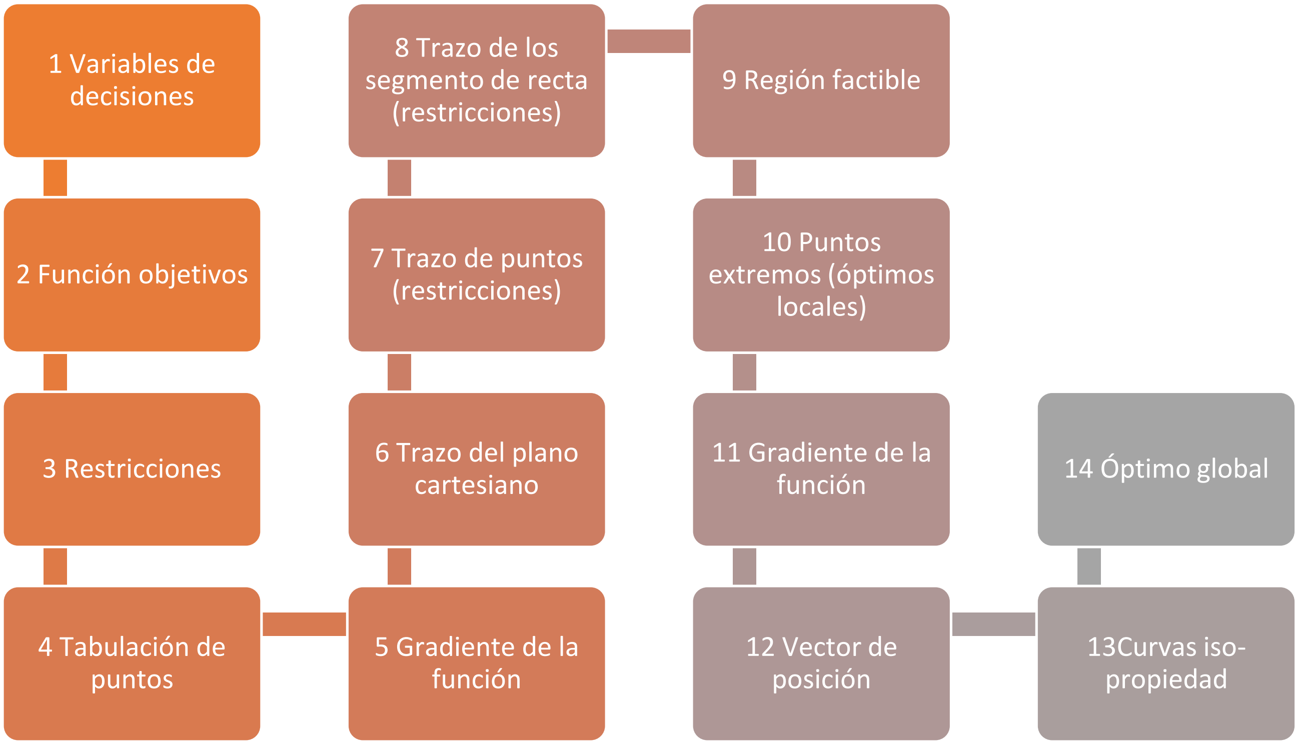

Figura 2. Procedimiento general para solución de problemas lineales por el método gráfico. Fuente: Elaboración propia con base en la aplicación del método gráfico para el contexto del aula

Gradiente de la función objetivo

El gradiente de la función objetivo, permite el trazo en el plano cartesiano (gráfica) del vector de posición vinculado a dicha función objetivo. De forma general, para optimizar la función objetivo, se requiere un desplazamiento en el hiperplano generado por dicha función objetivo, en dirección del gradiente de la función, cuando se trata de un problema de maximización y en dirección opuesta, cuando se refiere a un proceso de minimización, con la referencial ayuda de las curvas iso-propiedad (isolíneas o curvas de nivel).

4. MÉTODO ALTERNATIVO PARA EL CÁLCULO DEL GRADIENTE DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

La propuesta fue integrada, gracias a la interrogante de uno de los estudiantes, al sentir cierto rechazo por el cálculo diferencial, y en particular, la realización de derivadas parciales. En ese momento se planteó la posibilidad de recurrir a un método que no utilizara el concepto y contexto del cálculo diferencial, para determinar el vector de posición de la función objetivo.

El método de desarrollo de esta propuesta consistió en la reflexión para determinar una forma que permitiera encontrar las coordenadas del vector se posición omitiendo el uso de derivadas parciales. En el campo de la programación lineal, al tratarse las funciones objetivo $f(x_1, \ldots, x_n)$ como funciones lineales, las derivadas parciales para cada componente del vector de posición, pueden expresarse en la forma:

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(c_i x_i + \sum_{t=1;\, t\neq i}^{n} k_t\right) = c_{vp_i} \quad con\ i = 1, \dots, n \quad . \quad . \quad . \ (4)$$

con:

c_i el coeficiente de la componente diferenciable, correspondiente al vector de variables x_i con $i = 1, \dots, n$
x_i la componente diferenciable
k_t la serie de factores que conforman la función objetivo sin incluir la componente diferenciable, los cuales no varían con respecto de dicha componente, en el momento de la derivación parcial, con $t = 1, \dots, n$ y $t \neq i$
c_{vp_i} una constante (o componente de vector de posición).

Lo anterior debido a que todos los términos, que no sean la variable, se consideran constantes, siendo la derivada de cualquier constante igual a 0. Sin embargo, se reflexionó al respecto de una forma alternativa que permitiera obtener los coeficientes del vector de posición, para el trazo de dicho vector en el plano cartesiano. De esto se desprendió la propuesta algebraica, al reconocerse que se podía realizar una sumatoria de factores en combinación con la función objetivo, aunado a la una división en términos del factor o variable correspondiente a cada componente del vector de posición.

El gradiente de la función objetivo es de vital importancia para la solución de problemas lineales, cuyo espacio de solución se encuentre en x_1 y x_2, específicamente para el caso del método gráfico. Dado que permite generar un referente para el trazo de las curvas iso-propiedad, facilitando así, la determinación del optimo global, discriminado de entre los óptimos locales, los cuales, a su vez, forman parte del conjunto de puntos (óptimos) de la región factible.

Cabe hacer mención que este método alternativo, para el cálculo del gradiente de la función, no afecta el resultado final, al desarrollarse el método gráfico, sin embargo, requiere de una mayor cantidad de operaciones para llevar a cabo la solución del método. A pesar de ello, con la propuesta de cálculo alternativo, se cuenda con dos opciones para determinar el gradiente de la función objetivo, el cual permite conocer la ubicación de la curva (recta) de la propiedad a optimizar (costos, utilidades, beneficios, pérdidas, etc.), además de permitir la localización y trazo de las curvas iso-propiedad las cuales permiten determinar la solución óptima del ejercicio.

El cálculo del gradiente de la función objetivo se puede definir como la derivada parcial de la función objetivo con respecto de cada una de las variables de las cuales se compone la función objetivo, expresado en forma de vector. En otras palabras, el gradiente de la función, permite definir el vector de posición de la función objetivo, a saber (Ec. 5):

$$\nabla f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\ , \dots, \ \frac{\partial}{\partial x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\right). \quad . \ (5)$$

Alternativamente, el gradiente de la función puede representarse como (Ec. 6):

ISSN: 2007-4786
Volumen 16 – Número 2
Abril – Junio 2024

$$\nabla f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}^T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Sin embargo, para el presente estudio se opta por la forma expresada en la ecuación 5.

La determinación del gradiente de la función, resulta muy sencilla en la práctica, sin embargo, conceptualmente, existe rechazo por parte de los estudiantes, los cuales, al escuchar de la necesidad por realizar el proceso de diferenciación parcial, se pueden llegar a mostrar renuentes y agobiados. Para aquellos estudiantes de ingenierías o áreas a fines o áreas en la cual se utilice la programación lineal, la aplicación de derivadas parciales, resulta sencilla (en algunos casos); sin embargo, es prudente contar con alternativas de solución, las cuales, faciliten conceptualmente el desarrollo de operaciones como el cálculo del gradiente de la función.

Como ya se ha hecho mención el gradiente de la función objetivo, es útil para la solución de problemas lineales por el método gráfico, para el espacio de soluciones sobre x_1 y x_2 La propuesta, que se esboza en el presente documento, en términos prácticos, requiere de una mayor cantidad de tiempo, para determinar el gradiente de la función, sin embargo, es conceptualmente sencilla y presenta menor complejidad teórica de cálculo.

A continuación, se presenta una forma alternativa, para el cálculo del gradiente de la función objetivo, en el caso de un espacio de soluciones $\mathbb{R}^2$ (dos variables o $f(x_1, x_2)$) (Ec. 7):

$$\nabla f(x_1, x_2) = \left(\frac{f(x_1, x_2) - c_2 x_2}{x_1}, \frac{f(x_1, x_2) - c_1 x_1}{x_2} \right) \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

En esta expresión alternativa, se cambia el enfoque de uso de derivadas parciales, a un enfoque de operaciones algebraicas básicas de suma/resta y multiplicación/división. Cuya importancia se vislumbra en la posibilidad de genera un enfoque no convencional, distinto y alternativo para el estudiante.

En la siguiente tabla se presenta el desarrollo matemático para ambas formas de cálculo del gradiente de la función, en el caso de un problema lineal de dos variables (ver Tabla 1, Tabla 2).

Tabla 1. Ejemplo de cálculo del vector de posición para el caso de $\boldsymbol{f(x_1, x_2)}$, por el método tradicional

Método tradicional (Derivadas parciales)
Sea la función objetivo de un problema lineal de dos variables: $$\min z = f(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2$$ de lo cual se tiene $$f(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2$$ entonces, el gradiente de la función objetivo es, $$\nabla f(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2), \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2) \right)$$ con $$f(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2$$ se tiene

$$\nabla f(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(c_1x_1 + c_2x_2), \frac{\partial}{\partial x_2}(c_1x_1 + c_2x_2)\right)$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(c_1x_1) + \frac{\partial}{\partial x_1}(c_2x_2), \frac{\partial}{\partial x_2}(c_1x_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(c_2x_2)\right)$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \left(c_1\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1) + \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x_1}(c_2x_2)}, \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x_2}(c_1x_1)} + c_2\frac{\partial}{\partial x_2}(x_2)\right)$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \left(c_1\cancelto{1}{\frac{\partial x_1}{\partial x_1}}, c_2\cancelto{1}{\frac{\partial x_2}{\partial x_2}}\right)$$

es decir

$$\nabla f(x_1, x_2) = (c_1, c_2)$$

Fuente: Elaboración propia

Tabla 2. Ejemplo de cálculo del vector de posición para el caso de $f(x_1, x_2)$, por el método alternativo

Método alternativo propuesto

Sea la función objetivo de un problema lineal de dos variables:

$$\min z = f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$$

de lo cual se tiene

$$f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$$

entonces, el gradiente de la función objetivo, calculado mediante la propuesta alternativa, es,

$$\nabla f(x_1, x_2) = \left(\frac{f(x_1, x_2) - c_2x_2}{x_1}, \frac{f(x_1, x_2) - c_1x_1}{x_2}\right)$$

con

$$f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$$

se tiene

$$\nabla f(x_1, x_2) = \left(\frac{c_1x_1 + c_2x_2 - c_2x_2}{x_1}, \frac{c_1x_1 + c_2x_2 - c_1x_1}{x_2}\right)$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \left(\frac{c_1x_1 + \cancel{c_2x_2} - \cancel{c_2x_2}}{x_1}, \frac{\cancel{c_1x_1} + c_2x_2 - \cancel{c_1x_1}}{x_2}\right)$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \left(\frac{c_1x_1}{x_1}, \frac{c_2x_2}{x_2}\right) = \left(c_1\frac{x_1}{x_1}, c_2\frac{x_2}{x_2}\right) = [c_1 * (1), c_2 * (1)]$$

es decir

$$\nabla f(x_1, x_2) = (\ c_1, c_2\ )$$

Fuente: Elaboración propia

A continuación, se puede observar un ejemplo de cálculo del gradiente de la función para el caso específico de $f(x_1, x_2) = (2x_1 + 3x_2)$. En la tabla 3, se desarrolla el ejemplo para el cálculo del gradiente de la función mediante el método de derivadas parciales.

Tabla 3. Ejemplo de cálculo del vector de posición para el caso seleccionado ($\boldsymbol{min\ z = f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2}$), por el método tradicional

Método tradicional (Derivadas parciales)

Sea la función objetivo de un problema lineal de dos variables:

$$\min z = f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$$

de lo cual se tiene

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$$

entonces, el gradiente de la función objetivo es,

$$\nabla f(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2), \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2)\right)$$

con

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$$

se tiene

$$\nabla f(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(2x_1 + 3x_2), \frac{\partial}{\partial x_2}(2x_1 + 3x_2)\right)$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(2x_1) + \frac{\partial}{\partial x_1}(3x_2), \frac{\partial}{\partial x_2}(2x_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(3x_2)\right)$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(2x_1) + \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x_1}(3x_2)}, \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x_2}(2x_1)} + \frac{\partial}{\partial x_2}(3x_2)\right)$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \left(2\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1), 3\frac{\partial}{\partial x_2}(x_2)\right)$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \left(2\cancelto{1}{\frac{\partial x_1}{\partial x_1}}, 3\cancelto{1}{\frac{\partial x_2}{\partial x_2}}\right)$$

es decir

$$\nabla f(x_1, x_2) = (2,3)$$

Fuente: Elaboración propia

En la siguiente tabla (Tabla 4) se desarrolla el cálculo algebraico propuesto, para determinar el gradiente de la función, a través del método algebraico.

Tabla 4. Ejemplo de cálculo del vector de posición para el caso seleccionado ($min\ z = f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$), por el método alternativo propuesto

Método alternativo propuesto

Sea la función objetivo de un problema lineal de dos variables:

$$\min z = f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$$

de lo cual se tiene

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$$

entonces, el gradiente de la función objetivo, calculado mediante la propuesta alternativa, es,

$$\nabla f(x_1, x_2) = \left(\frac{f(x_1, x_2) - 3x_2}{x_1}, \frac{f(x_1, x_2) - 2x_1}{x_2}\right)$$

se tiene

$$\nabla f(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1 + 3x_2 - 3x_2}{x_1}, \frac{2x_1 + 3x_2 - 2x_1}{x_2}\right)$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1 + 3\cancel{x_2} - 3\cancel{x_2}}{x_1}, \frac{2\cancel{x_1} + 3x_2 - 2\cancel{x_1}}{x_2}\right)$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \left(\frac{2\cancel{x_1}}{\cancel{x_1}}, \frac{3\cancel{x_2}}{\cancel{x_2}}\right)$$

es decir

$$\nabla f(x_1, x_2) = (2, 3)$$

Fuente: Elaboración propia

En la tabla 5, se presenta el código para el cálculo del gradiente de la función por el método de derivadas parciales, para el caso de una función objetivo con dos variables, en Python® versión 3.7.

Tabla 5. Cálculo del gradiente de la función en Python ® versión 3.7 ($\boldsymbol{min\ z} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) = \boldsymbol{c_1 x_1} + \boldsymbol{c_2 x_2}$), por el método tradicional

Método tradicional (Derivadas parciales)
(Tiempo computacional 0.0002764999999999747 s)

```
import timeit

start =timeit.timeit()

 #Defining variables and constants (as variables)

 from sympy import *

init_printing()

x1 , x2 , c1 , c2 =symbols( 'x1 x2 c1 c2' )

f = c1*x1 + c2*x2

 print("f(x1,x2): ", f)

 #Calculating partial derivatives

 diff(f,x1)

diff(f,x2)



 #Definnig gradient

 gradient = (diff(f,x1) , diff(f,x2))

 #Printing gradient

 print(gradient)

end =timeit.timeit()

 print("Elapsed time :",start-end)
```

Fuente: Elaboración propia

En la siguiente tabla (Tabla 6) se presenta el algoritmo de cálculo para el gradiente de la función (con Python ® versión 3.7) por el método alternativo, para el caso de dos variables. Cabe hacer mención que el método alternativo es 0.000266699999999935 [s] más rápido que el método original (por derivadas parciales).

Tabla 6. Cálculo del gradiente de la función en Python ® versión 3.7 ($\boldsymbol{min\ z = \ f(x_1, x_2\ ) = c_1 x_1 + c_2 x_2}$), por el método alternativo propuesto. Fuente: Elaboración propia

Método alternativo propuesto
(Tiempo computacional 0.000009800000000038944 s)

```
import timeit

start =timeit.timeit()

 #Defining variables and constants (as variables)

 from sympy import *

init_printing()

x1 , x2 , c1 , c2 =symbols( 'x1 x2 c1 c2' )

f = c1*x1 + c2*x2

 print("f(x1,x2): ", f)

 #Calculating partial derivatives

 constant1=((f-c2*x2)/x1)

constant1=((f-c1*x1)/x2)


 #Definnig gradient

 gradient = ((f-c2*x2)/x1 , (f-c1*x1)/x2)

 #Printing gradient

 print(gradient)

end = timeit.timeit()

 print("Elapsed time :", start-end)
```

Aunado a lo anterior, en la tabla 7, se presenta el código para el cálculo del gradiente de la función por el método de derivadas parciales en Matlab® R2017b.

Tabla 7. Cálculo del gradiente de la función en Matlab® R2017b ($min\ z = \ f(x_1, x_2\ ) = c_1 x_1 + c_2 x_2$), por el método tradicional

Derivadas parciales
(Tiempo computacional 1.282483 s)

```
tic
clear all
%Declare variables
syms x1
```


ISSN: 2007-4786

```
syms x2

%Declare constants (as variables)
syms c1
syms c2

%Defining function (objective function)
f = inline('c1*x1+c2*x2','x1','x2','c1','c2')
%Partialy differentiating objective function
diff(f(x1,x2,c1,c2),x1)
diff(f(x1,x2,c1,c2),x2)

%Defining gradient
gradient=[diff(f(x1,x2,c1,c2),x1) diff(f(x1,x2,c1,c2),x2)]
toc
```

Fuente: Elaboración propia

En la siguiente tabla (Tabla 8) se presenta el algoritmo de cálculo para el gradiente de la función por el método alternativo, para el caso de dos variables (en Matlab® R2017b). Cabe hacer mención que el método alternativo es 0.000266699999999935 [s] más rápido que el método original (por derivadas parciales).

Tabla 8. Cálculo del gradiente de la función en Matlab® R2017b ($\boldsymbol{min\ z = f(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2}$), por el método alternativo propuesto, siendo este método 0.000266699999999935 [s] más rápido que el método original

Método alternativo propuesto
(Tiempo computacional 1.101512 s)

```
tic
clear all
%Declare variables
syms x1
syms x2

%Declare constants (as variables)
syms c1
syms c2

%Defining function (objective function)
f = inline('c1*x1+c2*x2','x1','x2','c1','c2')

%Apply alternative calculus
constant1=((f(x1,x2,c1,c2)-c2*x2)/x1)
constant1=((f(x1,x2,c1,c2)-c1*x1)/x2)

%Defining gradient
gradient=[((f(x1,x2,c1,c2)-c2*x2)/x1) ((f(x1,x2,c1,c2)-c1*x1)/x2)]
toc
```

Fuente: Elaboración propia

ISSN: 2007-4786

Dado que, para el caso de solución de problemas lineales, dimensionalmente se puede manejar un espacio de soluciones para tres variables, se desarrolla también, el cálculo del gradiente de la función objetivo para un espacio de soluciones $\boldsymbol{R}^3$, sobre x_1, x_2 y x_3 (Ec. 8).

$$\nabla f(x_1,x_2,x_3) = \left(\frac{f(x_1,x_2,x_3)-c_2x_2-c_3x_3}{x_1}, \frac{f(x_1,x_2,x_3)-c_1x_1-c_3x_3}{x_2}, \frac{f(x_1,x_2,x_3)-c_1x_1-c_2x_2}{x_3}\right) \quad . \quad . \tag{8}$$

En la siguiente tabla se presenta el desarrollo matemático para ambas formas de cálculo del gradiente de la función, en el caso de un problema lineal de tres variables (ver Tabla 9, Tabla 10).

Tabla 9. Ejemplo de cálculo del vector de posición para el caso de $f(x_1,x_2,x_3)$, por el método tradicional

Método tradicional (Derivadas parciales)

Sea la función objetivo de un problema lineal de dos variables:

$$\min z = f(x_1,x_2,x_3) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

de lo cual se tiene

$$f(x_1,x_2,x_3) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

entonces, el gradiente de la función objetivo es,

$$\nabla f(x_1,x_2,x_3) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1,x_2,x_3), \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1,x_2,x_3), \frac{\partial}{\partial x_3} f(x_1,x_2,x_3)\right)$$

con

$$f(x_1,x_2,x_3) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

se tiene

$$\nabla f(x_1,x_2,x_3) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3), \frac{\partial}{\partial x_2}(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3), \frac{\partial}{\partial x_3}(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3)\right)$$

$$\nabla f(x_1,x_2,x_3) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(c_1x_1) + \frac{\partial}{\partial x_1}(c_2x_2) + \frac{\partial}{\partial x_1}(c_3x_3), \quad \frac{\partial}{\partial x_2}(c_1x_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(c_2x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2}(c_3x_3), \right.$$
$$\left. \frac{\partial}{\partial x_3}(c_1x_1) + \frac{\partial}{\partial x_3}(c_2x_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(c_3x_3)\right)$$

$$\nabla f(x_1,x_2,x_3) = \left(c_1\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1) + \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x_1}(c_2x_2)} + \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x_1}(c_3x_3)}, \right.$$
$$\cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x_2}(c_1x_1)} + c_2\frac{\partial}{\partial x_2}(x_2) + \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x_2}(c_3x_3)},$$
$$\left. \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x_3}(c_1x_1)} + \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x_3}(c_2x_2)} + c_3\frac{\partial}{\partial x_3}(x_3)\right)$$

es decir

$$\nabla f(x_1,x_2,x_3) = (c_1,c_2,c_3)$$

Fuente: Elaboración propia

ISSN: 2007-4786
Volumen 16 – Número 2
Abril – Junio 2024

Tabla 10. Ejemplo de cálculo del vector de posición para el caso de $f(x_1, x_2, x_3)$, por el método alternativo

Método alternativo propuesto
Sea la función objetivo de un problema lineal de dos variables: $$\min z = f(x_1, x_2, x_3) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$ de lo cual se tiene $$f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

Fuente: Elaboración propia

entonces, el gradiente de la función objetivo, calculado mediante la propuesta alternativa, es, $$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{f(x_1, x_2, x_3) - c_2x_2 - c_3x_3}{x_1}, \frac{f(x_1, x_2, x_3) - c_1x_1 - c_3x_3}{x_2}, \frac{f(x_1, x_2, x_3) - c_1x_1 - c_2x_2}{x_3}\right)$$ con $$f(x_1, x_2, x_3) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$ se tiene $$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 - c_2x_2 - c_3x_3}{x_1}, \frac{c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 - c_1x_1 - c_3x_3}{x_2}, \frac{c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 - c_1x_1 - c_2x_2}{x_3}\right)$$ $$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{c_1x_1 + \cancel{c_2x_2} + \cancel{c_3x_3} - \cancel{c_2x_2} - \cancel{c_3x_3}}{x_1}, \frac{\cancel{c_1x_1} + c_2x_2 + \cancel{c_3x_3} - \cancel{c_1x_1} - \cancel{c_3x_3}}{x_2}, \frac{\cancel{c_1x_1} + \cancel{c_2x_2} + c_3x_3 - \cancel{c_1x_1} - \cancel{c_2x_2}}{x_3}\right)$$ $$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{c_1x_1}{x_1}, \frac{c_2x_2}{x_2}, \frac{c_3x_3}{x_3}\right) = \left(c_1\frac{x_1}{x_1}, c_2\frac{x_2}{x_2}, c_3\frac{x_3}{x_3}\right) = [c_1 * (1), c_2 * (1), c_3 * (1)]$$ es decir $$\nabla f(x_1, x_2) = (c_1, c_2, c_3)$$

A pesar de no ser factible la solución a través del método gráfico, se presenta también el cálculo alternativo del gradiente de la función objetivo para un espacio de soluciones $\boldsymbol{R^4}$ (de cuatro variables), con el objetivo de fundamentar el contexto general para un cálculo alternativo del gradiente de la función objetivo (Ec. 9).

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{f(x_1, x_2, x_3, x_4) - c_2x_2 - c_3x_3 - c_4x_4}{x_1}, \frac{f(x_1, x_2, x_3, x_4) - c_1x_1 - c_3x_3 - c_4x_4}{x_2}, \frac{f(x_1, x_2, x_3, x_4) - c_1x_1 - c_2x_2 - c_4x_4}{x_3}, \frac{f(x_1, x_2, x_3, x_4) - c_1x_1 - c_2x_2 - c_3x_3}{x_4}\right) \quad . \; . \; (9)$$

En la siguiente tabla se presenta el desarrollo matemático para ambas formas de cálculo del gradiente de la función, en el caso de un problema lineal de cuatro variables (ver Tabla 5, Tabla 6).

Tabla 11. Ejemplo de cálculo del vector de posición para el caso de $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, por el método tradicional

Método tradicional (Derivadas parciales)
Sea la función objetivo de un problema lineal de dos variables: $$\min z = f(x_1, x_2, x_3, x_4) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$$ de lo cual se tiene

ISSN: 2007-4786
Volumen 16 – Número 2
Abril – Junio 2024

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$$

entonces, el gradiente de la función objetivo es,

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, x_3, x_4), \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2, x_3, x_4), \frac{\partial}{\partial x_3} f(x_1, x_2, x_3, x_4), \frac{\partial}{\partial x_4} f(x_1, x_2, x_3, x_4)\right)$$

con

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$$

se tiene

$$\begin{aligned}\nabla f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4), \quad \frac{\partial}{\partial x_2}(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4),\right.\\ &\left.\frac{\partial}{\partial x_3}(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(c_1x_1) + \frac{\partial}{\partial x_1}(c_2x_2) + \frac{\partial}{\partial x_1}(c_3x_3) + \frac{\partial}{\partial x_1}(c_4x_4),\right.\\ &\frac{\partial}{\partial x_2}(c_1x_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(c_2x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2}(c_3x_3) + \frac{\partial}{\partial x_2}(c_4x_4),\\ &\frac{\partial}{\partial x_3}(c_1x_1) + \frac{\partial}{\partial x_3}(c_2x_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(c_3x_3) + \frac{\partial}{\partial x_3}(c_4x_4),\\ &\left.\frac{\partial}{\partial x_4}(c_1x_1) + \frac{\partial}{\partial x_4}(c_2x_2) + \frac{\partial}{\partial x_4}(c_3x_3) + \frac{\partial}{\partial x_4}(c_4x_4)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla f(x_1, x_2, x_3, x_3) = &\left(\frac{\partial}{\partial x_3}(c_1x_1) + \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x_3}(c_2x_2)} + \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x_3}(c_3x_3)} + \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x_3}(c_4x_4)},\right.\\ &\cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x_2}(c_1x_1)} + c_2\frac{\partial}{\partial x_2}(x_2) + \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x_2}(c_3x_3)} + \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x_2}(c_4x_4)},\\ &\cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x_3}(c_1x_1)} + c_2\cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x_3}(x_2)} + \frac{\partial}{\partial x_3}(c_3x_3) + \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x_3}(c_4x_4)},\\ &\left.\cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x_4}(c_1x_1)} + \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x_4}(c_2x_2)} + \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x_4}(c_3x_3)} + \frac{\partial}{\partial x_4}(c_4x_4)\right)\end{aligned}$$

es decir

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (c_1, c_2, c_3, c_4)$$

Fuente: Elaboración propia

ISSN: 2007-4786

Tabla 12. Ejemplo de cálculo del vector de posición para el caso de $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$, por el método alternativo

Método alternativo propuesto

Sea la función objetivo de un problema lineal de dos variables:

$$\min z = f(x_1,x_2,x_3,x_4) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$$

de lo cual se tiene

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$$

entonces, el gradiente de la función objetivo, calculado mediante la propuesta alternativa, es,

$$\nabla f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \left(\frac{f(x_1,x_2,x_3) - c_2x_2 - c_3x_3 - c_4x_4}{x_1}, \quad \frac{f(x_1,x_2,x_3) - c_1x_1 - c_3x_3 - c_4x_4}{x_2}, \frac{f(x_1,x_2,x_3) - c_1x_1 - c_2x_2 - c_4x_4}{x_3}, \frac{f(x_1,x_2,x_3) - c_1x_1 - c_2x_2 - c_3x_3}{x_4}\right)$$

con

$$f(x_1,x_2,x_3) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$$

se tiene

$$\nabla f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \left(\frac{c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 - c_2x_2 - c_3x_3 - c_4x_4}{x_1}, \frac{c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 - c_1x_1 - c_3x_3 - c_4x_4}{x_2}, \frac{c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 - c_1x_1 - c_2x_2 - c_4x_4}{x_3}, \frac{c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 - c_1x_1 - c_2x_2 - c_3x_3}{x_4}\right)$$

$$\nabla f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \left(\frac{c_1x_1 + \cancel{c_2x_2} + \cancel{c_3x_3} + \cancel{c_4x_4} - \cancel{c_2x_2} - \cancel{c_3x_3} - \cancel{c_4x_4}}{x_1}, \frac{\cancel{c_1x_1} + c_2x_2 + \cancel{c_3x_3} + \cancel{c_4x_4} - \cancel{c_1x_1} - \cancel{c_3x_3} - \cancel{c_4x_4}}{x_2}, \frac{\cancel{c_1x_1} + \cancel{c_2x_2} + c_3x_3 + \cancel{c_4x_4} - \cancel{c_1x_1} - \cancel{c_2x_2} - \cancel{c_4x_4}}{x_3}, \frac{\cancel{c_1x_1} + \cancel{c_2x_2} + \cancel{c_3x_3} + c_4x_4 - \cancel{c_1x_1} - \cancel{c_2x_2} - \cancel{c_3x_3}}{x_4}\right)$$

$$\nabla f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \left(\frac{c_1x_1}{x_1}, \frac{c_2x_2}{x_2}, \frac{c_3x_3}{x_3}, \frac{c_4x_4}{x_4}\right) = \left(c_1\frac{x_1}{x_1}, c_2\frac{x_2}{x_2}, c_3\frac{x_3}{x_3}, c_4\frac{x_4}{x_4}\right)$$
$$= [c_1 * (1), c_2 * (1), c_3 * (1), c_4 * (1)]$$

es decir

$$\nabla f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (\ c_1, c_2, c_3, c_4\ )$$

Fuente: Elaboración propia

De tal forma que la generalización para el cálculo alternativo del gradiente de la función para un espacio $\boldsymbol{R^n}$ (de n variables), se puede efectuar de la siguiente forma (Ec. 10):

$$\nabla f(x_1,\ldots,x_n) = \left(\frac{f(x_1,\ldots,x_n) - c_jx_j}{x_i}\right) \ tal\ que\ i = 1,\ldots,n\ \&\ \ j = 1,\ldots,n\ \&\ j \neq i \quad ...(10)$$

Para lo cual cada componente del gradiente de la función objetivo está dado por la *ratio* de la diferencia entre la función objetivo menos si misma a excepción de aquella variable y constante cuyo subíndice sea igual a la variable de referencia (denominador de la componente de referencia), con respecto de la variable de referencia (dividido entre la variable de referencia). Como forma adicional, se propone la siguiente expresión (Ec. 11).

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{x_i} \right) con \;\; i = 1, \dots, n; \quad tal\; que\; j \neq i \quad . \; . \; . \; (11)$$

Alternativamente se puede definir al gradiente de la función, como (Ec. 12).

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} c_j x_j}{x_i} \right) con \;\; i = 1, \dots, n; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (12)$$

5. CONCLUSIÓN

A pesar del carácter factual e inherente al campo de la ciencia matemática y sus ramas, es importante vislumbrar métodos alternativos para el cálculo o definición de los entes o funciones matemáticas utilizadas en alguna de las diferentes ramas, como lo es la investigación de operaciones (programación lineal), debido a la utilidad que lo anterior puede significar, para el mejor entendimiento de los métodos de solución.

Cabe hacer mención que, al momento, no se ha reportado o encontrado un proceso similar para el cálculo alternativo del gradiente de la función objetivo, que otorgue como resultado el vector de posición para la dicha función. Por lo cual se prevé un aporte en este campo del conocimiento.

Este enfoque se equipará con el desarrollo del estudiante en la vida profesional, generando un referente cognitivo que le permita, abordar los problemas o retos de la vida profesional, desde diferentes paradigmas, dando la pauta para la solución de problemas y la toma de decisiones.

En el desarrollo profesional, el estudiante egresado se enfrentará a problemas que parecen irresolubles por los métodos convencionales o tradicionales para la solución de problemas o problemáticas, sin embargo, cuando estos problemas o problemáticas son abordadas desde una perspectiva diferente, se puede generar una solución óptima o aproximada que satisfaga sus necesidades, expectativas o restricciones.

La contribución de la presente propuesta, en el campo de la didáctica correspondiente a la programación lineal (o investigación de operaciones), versa en torno al desarrollo de un método alternativo para el cálculo del gradiente de la función objetivo; el cálculo original mediante derivadas parciales, puede resultar cognitivamente complejo para diferentes estudiantes, dado que se habla de la aplicación de dicho concepto de derivadas parciales, en tanto que, la propuesta efectuada en este documento, reduce la complejidad conceptual al uso de métodos algebraicos, un tanto más simples.

Contribución de los autores

El desarrollo de la propuesta se ha alimentado del trabajo de los autores con base en la siguiente escala de trabajo: primer autor, realizó una búsqueda de sustento teórico para la propuesta además de contribuir con el análisis de la propuesta y su impacto en el contexto de enseñanza, por otro lado realizó contribuciones importantes para dilucidar la estructura matemática alternativa en el cálculo del gradiente de la función objetivo, además de contribuir con la programación en Python® y Matlab®, de la propuesta alternativa y el método tradicional. El segundo autor, apoyo en la fundamentación teórica y análisis matemático de las formulaciones propuestas. El tercer autor, realizó la programación en Python® y Matlab®, de la propuesta alternativa y el método tradicional, además de apoyar la fundamentación teórica.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado gracias a las oportunidades de desarrollo y estudio brindadas por la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, el Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería, el Área Académica de Computación y Electrónica, el Área Académica de Arquitectura e Ingeniería, así como la Escuela Superior de Tepeji del Río.

REFERENCIAS

[1] Adhikari, S., (2019). The 10 oldest ancient civilizations that have ever existed, Ancient History Lists, URL: [https://www.ancienthistorylists.com/ancient-civilizations/10-oldest-ancient-civilizations-ever-existed/].

[2] Alvarado-Boirivant, J., (2009). La programación lineal aplicación de la pequeñas y medianas empresas, Rev. Reflexiones, 88(1), pp. 89-105, ISSN: 1021-1209.

[3] Alvarado-Boirivant, J., (2011). El análisis post-optimal en programación lineal aplicada a la agricultura, Rev. Reflexiones, 90(1), pp. 161-173, ISSN: 1021-1209.

[4] Barrachina, D. G.-L., Boldizsar, A., Zoldy, M., y Torok, A., (2019). Can Neural Network Solve Everything? Case Study Of Contradiction In Logistic Processes With Neural Network Optimisation, 2019 Modern Safety Technologies in Transportation (MOSATT), DOI: [10.1109/mosatt48908.2019.8944120], URL: [https://ieeexplore.ieee.org/document/8944120].

[5] Bazaraa, M.S., Jarvis, J.J., y Sherali, H.D., (2005). Programación Lineal Y Flujo en Redes, ISBN: 968-18-4867-5, Limusa, México.

[6] Bazaraa, M.S., Jarvis, J.J. y Sherali, H.D., (2010). Programación Lineal Y Flujo en Redes, ISBN: 978-0-470-46272-0, John Wiley & Sons, Inc., United States of America.

[7] Belova, T. L. y Ivanchuk, O.V., (2020). Problemas de la enseñanza de las matemáticas a los estudiantes de ex-repúblicas soviéticas en universidades médicas y sus posibles soluciones. Dilemas contemporáneos: Educación, Política y Valores, URL: [https://dilemascontemporaneoseducacionpoliticayvalores.com/index.php/dilemas/article/view/1981].

[8] Brocardo, J., Delgado, C., Mendes, F., y da Ponte, J. P., (2022). Ações do professor e desenvolvimento do raciocínio matemático durante a discussão coletiva de uma tarefa. Educación matemática, 34(2), 101-133, URL: [http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol34/2/04_REM_34-2.pdf], DOI: [10.24844/EM3402.04].

[9] Boyer, C.B. y Merzbach, U.C., (2011). Capítulo 2: Ancient Egypt, En: A History of Mathematics, 3rd Edition, ISBN: 978-0-470-52548-7.

[10] Dantzig, G.B., (1981). Reminiscences about the origins of linear programing, Systems Optimization Laboratory, Department of Operations Research, Stanford University, URL: [https://apps.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a112060.pdf].

[11] Diaz-Muñoz, G. M., (2005). Programación lineal como herramienta para toma de decisiones financieras, reflexiones, URL: [https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5137584.pdf].

[12] Garmany, J., Orcutt, J. A. y Parker, R. L., (1979). Travel time inversion: A geometrical approach. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 84(B7), 3615–3622, DOI: [10.1029/jb084ib07p03615], URL: [https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/JB084iB07p03615].

[13] Herrada-Valverde, R. I. y Baños-Navarro, R., (2018). Experiencias de aprendizaje cooperativo en matemáticas. Espiral. Cuadernos del Profesorado, 11(23), 99-108, URL: [https://ojs.ual.es/ojs/index.php/ESPIRAL/article/view/2131].
[14] Martzloff, J.C., (1997). A History of Chinese Mathematics, DOI: [10.1007/978-3-540-33783-6], URL: [https://www.springer.com/gp/book/9783540337829].
[15] Mocholi-Arce, M. y Sala-Garrido, R., (1993). Capítulo 1: Introducción, En: Programación lineal, metodología y problemas, Ed. Tébar, S.L., ISBN: 8473601343.
[16] Molina-Ruiz, H. D. Bravo-Vargas, G., Flores-García, V. S. y Ordoñez-Hernández, T. S., (2015). Estudio comparativo de planes y programas para la oferta del programa educativo de Ingeniería en Logística, en una universidad autónoma del centro sur de México, Innovación y Desarrollo Tecnológico Revista Digital 7(2):41-82, URL: [https://iydt.files.wordpress.com/2016/03/01-estudio-comparativo-de-planes-y-programas-para-la-oferta-del-programa-educativo-de-ingenierc3ada-en-logc3adstica.pdf] & [https://www.uaeh.edu.mx/investigacion/productos/7260/].
[17] Molina-Ruiz, H. D., García-Lirios, C. Carreón-Guillén, J. García-Munguía, M. y Sánchez-Sánchez, A., (2019). Hacia una didáctica específica para la asignatura de ergonomía en una universidad mexicana. TECNOCIENCIA Chihuahua 13(2), pp. 86-98, URL: [https://vocero.uach.mx/index.php/tecnociencia/article/view/522].
[18] Mora-Rojas, V., (2016). Saberes construidos sobre la Didáctica de las Matemáticas en la formación docente: el desarrollo de las prácticas de los estudiantes normalistas. Dilemas contemporáneos: Educación, Política y Valores, URL: [https://dilemascontemporaneoseducacionpoliticayvalores.com/index.php/dilemas/article/view/267].
[19] Moreno-Villacís, M. D. y Pino-Ávila, C., (2018). El arte del modelado para la enseñanza de la matemática en la carrera de Administración de Empresas y Negocios. Dilemas contemporáneos: Educación, Política y Valores, URL: [https://dilemascontemporaneoseducacionpoliticayvalores.com/index.php/dilemas/article/view/870].
[20] Neugebauer, O., (1969). Exact Sciences in Antiquity, Dover Publications, Inc., Segunda Edición.
[21] Pino-Ávila, C., Cervantes-Rodríguez, L. y Espín-Beltrán, C.X., (2019). Educación en economía ambiental a través de las matemáticas en la formación del Ingeniero Industrial. Dilemas contemporáneos: Educación, Política y Valores, URL: [https://dilemascontemporaneoseducacionpoliticayvalores.com/index.php/dilemas/article/view/1340].
[22] Reidhead, V. A., (1979). Linear Programming Models in Archaeology, Annual Review of Anthropology, 8(1), 543–578, DOI: [10.1146/annurev.an.08.100179.002551], URL: [https://www.annualreviews.org/doi/pdf/10.1146/annurev.an.08.100179.002551].
[23] Rodríguez-Revelo, E. y Alarcon-Salvatierra, P. A., (2020). Estrategias didácticas para efectivizar procesos de enseñanza en la educación superior. Dilemas contemporáneos: Educación, Política y Valores, URL: [https://dilemascontemporaneoseducacionpoliticayvalores.com/index.php/dilemas/article/view/2233].
[24] Seidenberg, A., (1978). The origin of mathematics, Archive for history of exact sciences, 18(4), 301-342, DOI: [https://doi.org/10.1007/BF00348435], URL: [https://link.springer.com/article/10.1007%2FBF00348435].
[25] Simg, R. y Trigueros, M., (2022). El papel de los conceptos geométricos como base para el aprendizaje del método simplex. Educación matemática, 34(1), 70-99, DOI: [10.24844/EM3401.03], URL: [http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol34/1/03_REM_34-1.pdf].
[26] Steen, L.A., (1979). Linear programing: Solid new algorithm, Science News, 119, 234--236, URL: [http://www.steen-frost.org/Steen/Papers/79linprog.pdf].
[27] Taha, H.A., (2012). Capítulo 2: Modelado con programación lineal, En: Investigación de operaciones, ISBN: 978-607-32-0796-6, Novena edición, Ed. Pearson Educación, México.
[28] Taha, H.A., (2017). Investigación de operaciones, ISBN: 978-607-32-4121-2, Décima edición, Ed. Pearson Educación, México
[29] Valero-Molina, N. y Jiménez-Fernández, G., (2015). Estudio exploratorio sobre dificultades en el aprendizaje de una segunda lengua: la opinión del profesorado. Espiral. Cuadernos del Profesorado, 8(16), 3-12, URL: [https://ojs.ual.es/ojs/index.php/ESPIRAL/article/view/983].
[30] Wang, Y. y Ruhe, G., (2007). The cognitive process of decision making. International Journal of Cognitive Informatics and Natural Intelligence (IJCINI), 1(2), 73-85, URL: [http://www.ttsell.ir/ArticleFiles/ENARTICLE/64-1-3002.pdf].

Correo de autor de correspondencia: ***hmolina@uaeh.edu.mx; m_en_i_molina_ruiz@engineer.com***

ISSN: 2007-4786